В. И. МИРОНЕНКО

ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИЙ ВДОЛЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. И. Мироненко

ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИЙ ВДОЛЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Минск
Издательство БГУ им. В. И. Ленина
1981

ББК 22.161.8
М64

УДК 517.9

Рекомендована кафедрой высшей математики
Белгосуниверситета им. В. И. Ленина

Рецензент
Э. И. Грудо, доктор физико-математических наук

Мироненко В. И. **Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений.** Минск, Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1981, 104 с.

В монографии даются необходимое и достаточное условия существования стационарных первых интегралов. Задача об определении общего решения дифференциальной системы по конечному числу ее решений сводится к нахождению стационарных первых интегралов другой, специальным образом построенной системы. Вводится и изучается новый класс существенно нелинейных систем с элементарными решениями. Доказывается теорема о равномерной ограниченности порядков алгебраических траекторий дифференциальных систем с голоморфной правой частью, все траектории которых алгебраические. Дается новый метод нахождения начальных условий для периодических решений, основанный на представлении решения в виде суммы четной и нечетной функций.

Монография рассчитана на специалистов-математиков (научных работников, аспирантов и преподавателей вузов). Может быть полезна студентам старших курсов математических факультетов.

Ил. 10, библ. 45.

$М\frac{20203-012}{М317-81}$ 31—81 1702050000

© Издательство БГУ им. В. И. Ленина, 1981

ПРЕДИСЛОВИЕ

Особенность предлагаемой работы состоит в том, что в ней развиваются и обобщаются хорошо известные из элементарной теории дифференциальных уравнений понятия. Новые результаты являются следствиями этих обобщений.

В гл. I даются эффективно проверяемые необходимое, а также достаточное условия существования стационарных первых интегралов у нестационарных систем, выясняются условия их независимости, устанавливается количество независимых стационарных интегралов. Приводятся различные задачи, связанные с наличием или отсутствием геометрических инвариантов у оператора сдвига вдоль решений дифференциальной системы. Устанавливается прямая связь между существованием у системы указанных инвариантов и наличием стационарных первых интегралов у некоторой новой системы, построенной по рассматриваемой системе. Задача об определении общего решения дифференциального уравнения по конечному числу его решений сводится к нахождению стационарных первых интегралов у специальным образом построенной дифференциальной системы. Устанавливается критерий алгебраичности всех траекторий дифференциальной системы. Доказывается теорема о равномерной ограниченности порядков траекторий голоморфной системы, все траектории которой суть алгебраические кривые.

В гл. II вводится понятие вложимой системы и изучаются свойства вложимых систем. В гл. III предлагается новый метод нахождения начальных данных периодических решений дифференциальных уравнений и доказательств их существования или отсутствия. Причем и здесь в основе метода лежит элементарный факт возможности однозначного представления любой функции в виде суммы четной и нечетной функций. Этот метод может быть обобщен на линейные двухточечные задачи.

Книга написана таким образом, что она будет доступна читателю, знакомому с теорией линейных дифференциальных систем и такими понятиями теории дифференциальных уравнений, которые излагаются в любом систематическом курсе дифференциальных уравнений. Ее могут использовать преподаватели вузов на практических и лабораторных занятиях со студентами с целью более глубокого усвоения теории линейных уравнений и систем, а также таких понятий, как первый интеграл или линейная зависимость функций. Примеры, приведенные в тексте, а также упражнения и задачи, помещенные в конце работы, облегчают ее понимание и использование.

Автор считает своим приятным долгом отметить, что эта работа велась под руководством Н. П. Еругина и Ю. С. Богданова, оказавших большое влияние на творческие интересы автора. Термин «вложимые системы», кстати, был предложен Ю. С. Богдановым. Постоянное творческое общение автора с членами семинара Н. П. Еругина не могло не сказаться на этой работе. Автор искренне благодарен рецензенту доктору физико-математических наук Э. И. Грудо, а также всем тем, кто имел терпение и интерес обсуждать с автором затронутые в предлагаемой работе вопросы.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbf{R}$ — множество действительных чисел;
$\mathbf{R}_0$ — множество неотрицательных действительных чисел;
$\mathbf{R}^+$ — множество положительных действительных чисел;
$\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел;
$\mathbf{N}_0$ — множество неотрицательных целых чисел;
$\mathbf{C}$ — множество комплексных чисел;

$\overset{\Delta}{=}$ — равно по определению;
$\overset{t}{\equiv}$ — равно тождественно по t;
Δ — начало и конец доказательства;
A^T — матрица, полученная транспонированием матрицы A; $x(t), t \in I$, — функция с интервалом определения I; $x(t), x(t_0) = x_0$, — функция, удовлетворяющая условию $x(t_0) = x_0$.

Иногда функция $t \to x(t)$ во избежание путаницы с ее значением $x(t)$ в точке t будет обозначаться также через $x(\cdot)$. Пусть $\varphi(x)$ — вектор-столбец. Тогда $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \overset{\Delta}{=} \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right)$, если $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$.

Производная по t обозначается точкой сверху, так что $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$

ВВЕДЕНИЕ

Настоящую работу можно разделить на две части. Первая из них (гл. I, II) характеризуется систематическим применением понятия линейной зависимости функций к изучению решений дифференциальных уравнений. Понятие линейной зависимости оказалось связанным с понятиями стационарного интеграла и нелинейного базиса для нелинейных дифференциальных уравнений. Задача отыскания стационарных первых интегралов дифференциальных систем поставлена и для определенного класса систем решена в книге Н. П. Еругина [1] (§ 1, 2 гл. XI). Эту задачу удалось связать с рядом других классических задач, в частности с задачей определения общего решения дифференциальной системы по конечному числу ее решений. Последняя решалась еще в прошлом веке Дарбу, Ф. Г. Миндингом, А. Н. Коркиным, В. П. Ермаковым [2, с. 450]. Не пропал интерес к этой задаче и в настоящее время [3; 4].

С помощью понятия линейной зависимости удалось выделить и частично изучить новые классы нелинейных дифференциальных систем с элементарными решениями (системы с алгебраическими траекториями и так называемые вложимые системы). Начиная с работ А. Пуанкаре, Г. Дюлака, А. М. Ляпунова, при изучении поведения автономной системы в окрестности нулевого решения используются так называемые нормальные формы. Наиболее общие результаты в теории нормальных форм получены А. Д. Брюно [5; 6]. Во многих случаях нормальные формы представляют собой вложимые системы (гл. II настоящей работы). В частности, нормальные формы, полученные Г. Дюлаком, всегда оказываются сильно вложимыми [6, с. 104; 7, с. 138]. Неявным образом вложимые системы использовались в [8].

Вторая часть работы (гл. III) посвящена вопросам существования периодических решений дифференциальных систем и нахождению их начальных данных. Основные идеи, которые использовались при изучении этих вопросов, почерпнуты автором из книги В. А. Плисса [9]. Симметричность изучаемых периодических решений (четность, нечетность и т. п.) использовалась и другими авторами [10—13].

Как известно, существуют классы функций одной переменной (например, класс голоморфных функций), для которых справедливо следующее утверждение: функции $\varphi_i(t)$, $i=\overline{1;\ m}$, $t \in I$, из данного класса линейно зависимы на I тогда и только тогда, когда их вронскиан $|\varphi_1, \ldots, \varphi_m|(t)$ обращается в нуль всюду на I.

Пусть теперь $\varphi_i(t, x)$, $i=\overline{1;\ m}$, есть известные функции независимых переменных $(t, x)=(t, x_1, \ldots, x_n)$, а $x(t)$ — вообще говоря, неизвестное решение системы

$$\dot{x}=X(t, x), \ (t, x) \in D. \qquad (X)$$

Тогда $\varphi_i(t, x(t))$, $i=\overline{1;\ m}$, есть некоторые функции одной переменной t. Вронскиан этих функций можно найти, вычисляя соответствующие производные в силу системы (X). Этот вронскиан, таким образом, будет иметь вид $|\varphi_1, \ldots, \varphi_m|(t, x(t))$, где $|\varphi_1, \ldots, \varphi_m|(t, x)$ есть известная функция переменных t, x. Имея в виду это замечание и используя утверждения, аналогичные сформулированным выше, можно доказать, что для соответствующих классов функций $\varphi_i(t, x)$ и $X(t, x)$ тождество $|\varphi_1, \ldots, \varphi_m|(t, x) \equiv 0$ выполняется тогда и только тогда, когда вдоль любого решения $x(t)$ системы (X) функции $\varphi_i(t, x)$, $i=\overline{1;\ m}$, линейно зависимы, т. е. когда линейно зависимы функции $\varphi_i(t, x(t))$, $i=\overline{1;\ m}$. Этот простой факт наряду с теоремой Бэра и некоторым аналогом теоремы единственности для голоморфных функций нескольких переменных (см. § 4 гл. I) лежит в основе формальных рассуждений первых двух глав.

Как в научном, так и в методическом отношении переход от теории систем линейных дифференциальных уравнений к теории нелинейных систем связан со значительными трудностями: сложностью свойств нелинейных систем; отсутствием достаточно широкого, простого и хорошо изученного класса нелинейных дифференциальчастей этого решения. Легко доказать, что решение $x(t)$ 2ω-периодической системы (X) будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда $x_{н}(\omega)=0$. Этот факт дает возможность сформулировать и доказать некоторые достаточные признаки наличия или отсутствия периодических решений у дифференциальных систем. На основании этих признаков составлено алгебраическое уравнение второй степени, позволяющее найти начальные данные периодических решений уравнения Риккати общего вида.

В этой главе дано определение нечетной эквивалентности двух систем. Грубо говоря, две системы вида (X) названы нечетно-эквивалентными, если между их решениями

$$x(t, x_0),\ x(0, x_0)=x_0, \text{ и } y(t, y_0),\ y(0, y_0)=y_0,$$

можно установить взаимно однозначное соответствие $y_0=\varphi(x_0)$, при котором отношение

$$\frac{\|y_{н}(t, \varphi(x_0))\|}{\|x_{н}(t, x_0)\|} \triangleq \frac{\|y(t, \varphi(x_0))-y(-t, \varphi(x_0))\|}{\|x(t, x_0)-x(-t, x_0)\|}$$

не зависит от t.

Показано, что две нечетно-эквивалентные системы имеют одинаковое число периодических решений (точнее, между периодическими решениями двух нечетно-эквивалентных систем можно установить взаимно однозначное соответствие). Доказана теорема, позволяющая свести вопрос о нечетной эквивалентности двух заданных дифференциальных систем к решению некоторой недифференциальной системы.

Глава I. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИЙ И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Линейная зависимость функций одной переменной

Этот параграф носит вспомогательный характер. Здесь приводятся известные результаты, необходимые для полноты изложения и относящиеся к линейной зависимости функций одного переменного. Попутно предлагается новая методика изложения теории линейных дифференциальных уравнений.

1 Пусть заданы $n+1$ функций $\varphi_i :]\alpha, \beta[\to \mathbf{R}$, $i=\overline{0;\ n}$. Назовем эти функции линейно зависимыми на $]\alpha, \beta[$, если существуют постоянные $a_0, \ldots, a_n$, для которых при любом $t \in]\alpha, \beta[$

$$a_0\varphi_0(t)+\ldots+a_n\varphi_n(t)=0 \text{ и } a_0^2+\ldots+a_n^2\neq 0.$$

В противном случае функции φ_i будем называть линейно независимыми на $]\alpha, \beta[$.

Символом $|\varphi_0, \ldots, \varphi_n|$ обозначим следующий определитель:

$$|\varphi_0, \ldots, \varphi_n| \triangleq \begin{vmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & \ldots & \varphi_n \\ \varphi'_0 & \varphi'_1 & \ldots & \varphi'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0^{(n)} & \varphi_1^{(n)} & \ldots & \varphi_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

где $\varphi_k^{(i)}$ — i-я производная функции φ_k. Пусть также

$$|\varphi_0, \ldots, \widehat{\varphi_k}, \ldots, \varphi_n| \triangleq |\varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1}, \varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n|.$$

Теорема 1. Пусть n раз дифференцируемые функции $\varphi_i :]\alpha, \beta[\to \mathbf{R}$, $i=\overline{0;\ n}$, линейно зависимы на $]\alpha, \beta[$. Тогда при любом $t \in]\alpha, \beta[$ верно равенство $|\varphi_0, \ldots, \varphi_n|(t)=0$.

Доказательство см. в [2, с. 185].

Утверждение, обратное теореме 1, неверно. В самом деле, для функций t^3, $|t|^3$ вронскиан $|t^3, |t|^3|=0$ при всех $t\in\mathbf{R}$, тем не менее эти функции линейно независимы на $\mathbf{R}$.

Теорема 2. Пусть для n раз дифференцируемых на $]\alpha,\beta[$ функций $\varphi_0,\ldots,\varphi_n$ при любом $t\in]\alpha,\beta[$ верны соотношения $|\varphi_0,\ldots,\varphi_n|(t)=0$ и $|\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1}|(t)\neq 0$. Тогда функции φ_i линейно зависимы на $]\alpha,\beta[$ и

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(t) & \varphi_1(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_0{}^{(0)}(t_0) & \varphi_1{}^{(0)}(t_0) & \ldots & \varphi_n{}^{(0)}(t_0) \\ \varphi_0{}^{(1)}(t_0) & \varphi_1{}^{(1)}(t_0) & \ldots & \varphi_n{}^{(1)}(t_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0{}^{(n-1)}(t_0) & \varphi_1{}^{(n-1)}(t_0) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix}=0 \qquad (1)$$

при всех t и t_0 из $]\alpha,\beta[$. При этом функция φ_n есть линейная комбинация остальных функций $\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1}$

$\triangle$ Подберем $a_i=a_i(t)$ таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$a_0\varphi_0{}^{(0)}+\ldots+a_{n-1}\varphi_{n-1}^{(0)}=\varphi_n{}^{(0)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_0\varphi_0{}^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}\varphi_{n-1}^{(n-1)}=\varphi_n{}^{(n-1)}.$$

Тогда

$$a_i=\frac{|\varphi_0,\ldots,\varphi_{i-1},\varphi_n,\varphi_{i+1},\ldots,\varphi_{n-1}|}{|\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1}|},\quad i=\overline{0;n-1},$$

являются дифференцируемыми функциями. Для найденных a_i

$$a_0\varphi_0{}^{(n)}+\ldots+a_{n-1}\varphi_{n-1}^{(n)}-\varphi_n{}^{(n)}\equiv$$
$$\equiv(-1)^{n-1}\frac{|\varphi_0,\ldots,\varphi_n|}{|\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1}|}\equiv 0.$$

Поэтому верны соотношения

$$a_0\varphi_0{}^{(0)}+\ldots+a_{n-1}\varphi_{n-1}^{(0)}=\varphi_n{}^{(0)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_0\varphi_0{}^{(n)}+\ldots+a_{n-1}\varphi_{n-1}^{(n)}=\varphi_n{}^{(n)}.$$

Дифференцируя каждое из этих соотношений и учитывая следующее за ним, получаем тождества

$$a'_0\varphi_0{}^{(0)}+\ldots+a'_{n-1}\varphi_{n-1}^{(0)}\equiv 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a'_0\varphi_0{}^{(n-1)}+\ldots+a'_{n-1}\varphi_{n-1}^{(n-1)}\equiv 0,$$

откуда $a'_i(t)\equiv 0$. Поэтому

$$a_i(t)\equiv a_i(t_0)=\frac{|\varphi_0,\ldots,\varphi_{i-1},\ \varphi_n,\ \varphi_{i+1},\ldots,\varphi_{n-1}|(t_0)}{|\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1}|(t_0)}.$$

Подставив полученные для $a_i(t)$ значения в тождество

$$a_0(t)\varphi_0(t)+\ldots+a_{n-1}(t)\varphi_{n-1}(t)-\varphi_n(t)\equiv 0$$

и сделав несложные преобразования, докажем теорему 2. $\triangle$

Примечание. Если φ_i дифференцируемы n раз на $]\alpha,\beta[$ и при некотором $t_0\in]\alpha,\beta[$

$$\sum_{i=0}^{n}|\varphi_0,\ldots,\widehat{\varphi_i},\ldots,\varphi_n|^2(t_0)\neq 0,\ \text{а}\ |\varphi_0,\ldots,\varphi_n|(t)\equiv 0,$$

то существует интервал $I\subset]\alpha,\beta[$, на котором φ_i линейно зависимы, и эту зависимость можно записать с помощью соотношения вида (1).

$\triangle$ Из непрерывности функций $|\varphi_0,\ldots,\widehat{\varphi_i},\ldots,\varphi_n|$ на $]\alpha,\beta[$ следует существование номера k и подынтервала $I\ni t_0$, на котором $|\varphi_0,\ldots,\widehat{\varphi_k},\ldots,\varphi_n|(t)\neq 0$. Произведем перенумерацию функций φ_i так, чтобы функция φ_k имела номер n, и применим теорему 2. $\triangle$

Следствие 1. Если n раз дифференцируемые на I функции удовлетворяют условию $|\varphi_0,\ldots,\varphi_n|(t)\equiv 0$, то I можно разбить на подынтервалы I_k таким образом, что на каждом I_k функции φ_i линейно зависимы и $\overline{\cup I_k}\supset I$ (черта означает замыкание).

$\triangle$ Пусть $W_n(t)\triangleq|\varphi_0,\ldots,\varphi_n|(t)$. Разобьем I на I_k нулями функции $W_{n-1}(t)$ таким образом, чтобы на каждом I_k выполнялось одно из двух: либо $W_{n-1}(t)\equiv 0$, либо $W_{n-1}(t)\neq 0$. Тогда на тех I_k, где $W_{n-1}(t)\neq 0$, функции φ_i линейно зависимы в силу теоремы 2. Каждый интервал I_k, где $W_{n-1}(t)\equiv 0$, разобьем нулями функции W_{n-2} аналогично тому, как разбивали I. Продолжая этот процесс до $W_0=\varphi_0$, разобьем I на I_k таким образом, что на каждом I_k функции φ_i линейно зависимы, кроме тех I_k, где $\varphi_0(t)\equiv 0$. Но там, где $\varphi_0(t)\equiv 0$, φ_i также линейно зависимы. $\triangle$

Следствие 2. Для линейной зависимости на интервале I голоморфных на I функций $\varphi_0,\ldots,\varphi_n$ необходимо и достаточно выполнение $|\varphi_0,\ldots,\varphi_n|(t)\equiv 0$ [15; 16, с. 145].

Необходимость следует из теоремы 1, а *достаточность* — из следствия 1 и теоремы единственности для голоморфных функций [17, с. 104].

Рассмотрим теперь линейное однородное дифференциальное уравнение

$$x^{(n)}+p_{n-1}(t)x^{(n-1)}+\ldots+p_0(t)x=0 \tag{2}$$

с непрерывными на интервале I коэффициентами. Как известно [18, с. 286], решения этого уравнения однозначным образом определяются своими начальными условиями и существуют на всем I.

Лемма 1. Для любых $n+1$ решений $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ уравнения (2) справедливо тождество

$$|\varphi_0, \ldots, \varphi_n|(t)\equiv 0, \quad t\in I.$$

△ Последняя строка вронскиана $|\varphi_0, \ldots, \varphi_n|$ имеет вид $(\varphi_0^{(n)}, \varphi_1^{(n)}, \ldots, \varphi_n^{(n)})$. Так как любая функция φ_i, $i=\overline{0;\ n}$, является решением уравнения (2), то

$$\varphi_i^{(n)}=-p_{n-1}\varphi_i^{(n-1)}-\ldots-p_0\varphi_i. \tag{3}$$

Поэтому последняя строка рассматриваемого вронскиана является линейной комбинацией предыдущих строк. Откуда и следует утверждение леммы. △

Лемма 2. Для любых n решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ уравнения (2) справедлива формула Остроградского — Лиувилля

$$|\varphi_1, \ldots, \varphi_n|(t)\equiv|\varphi_1, \ldots, \varphi_n|(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} p_{n-1}(\tau)\,d\tau\right)$$

Доказательство проведем согласно [18, с. 440—441].
Имеем

$$\frac{d}{dt}|\varphi_1, \ldots, \varphi_n|=\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & \ldots & \varphi'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-2)} & \varphi_2^{(n-2)} & \ldots & \varphi_n^{(n-2)} \\ \varphi_1^{(n)} & \varphi_2^{(n)} & \ldots & \varphi_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

В последнем определителе заменим каждое $\varphi_i^{(n)}$ соответствующей суммой согласно формуле (3). Тогда после элементарных преобразований получим тождество

$$\frac{d}{dt}|\varphi_1, \ldots, \varphi_n|\equiv-p_{n-1}|\varphi_1, \ldots, \varphi_n|,$$

из которого и будет следовать утверждение леммы. △

Совокупность n решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ уравнения (2) называется фундаментальной системой решений этого уравнения, если их вронскиан $|\varphi_0, \dots, \varphi_n|$ хоть в одной точке интервала I отличен от нуля.

Лемма 3. У всякого уравнения (2) с непрерывными коэффициентами существует фундаментальная система решений. Вронскиан любой фундаментальной системы уравнения (2) отличен от нуля при всех $t \in I$.

$\triangle$ Выберем точку $t_0 \in I$ произвольным образом. Согласно теореме существования и единственности для линейных уравнений [18, с. 291] существуют n решений $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ уравнения (2) с начальными данными $\varphi_i^{(k)}(t_0) = \delta_{ik}$, $k = \overline{0; n-1}$, где δ_{ik} — символ Кронекера. Вронскиан этих решений в точке t_0 равен единице, поэтому они образуют фундаментальную систему.

Из леммы 2 следует, что вронскиан любой фундаментальной системы не равен нулю на интервале I. $\triangle$

Теорема 3. Все решения уравнения (2) и только они содержатся в формуле $x = c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t)$, где $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ есть некоторая фундаментальная система решений этого уравнения.

$\triangle$ Пусть $x(t)$ — некоторое решение уравнения (2). По лемме 1 вронскиан $|x, \varphi_1, \dots, \varphi_n|(t) \equiv 0$, $t \in I$. Так как вронскиан $|\varphi_1, \dots, \varphi_n|$ на I в нуль не обращается (см. лемму 3), то согласно теореме 2 функция $x(t)$ есть линейная комбинация функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Первая часть теоремы доказана.

Подстановка $c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t)$ в уравнение (2) показывает, что при любых значениях постоянных $c_1, \dots, c_n$ эта функция является решением уравнения (2). Значит, рассматриваемая формула определяет только решения уравнения (2). $\triangle$

Когда коэффициенты уравнения (2) постоянны, тогда фундаментальная система решений уравнения (2) состоит из элементарных функций (квазимногочленов) и может быть найдена элементарными методами [2, с. 214—223].

§ 2. Первые стационарные интегралы дифференциальных систем и условия их существования

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (t, x) \in D, \tag{1}$$

с непрерывной в области D функцией f.

Дифференцируемая функция $U(t, x)$, заданная в некоторой подобласти G области D, называется первым интегралом системы (1) в области G, если для любого решения $x(t)$, $t \in I$, системы (1), график которого расположен в G, функция $U(t, x(t))$, $t \in I$, постоянна, т. е. $U(t, x(t))$ зависит только от выбора решения $x(t)$ и не зависит от t.

Пусть $V(t, x)$, $V: G \to \mathbf{R}$, есть некоторая функция. Производной от функции V в силу системы (1) назовем функцию $V^{(1)}(t, x)$, $V^{(1)}: G \to \mathbf{R}$, определяемую равенством

$$V^{(1)}(t, x) \stackrel{\triangle}{=} \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x).$$

Следующие две леммы хорошо известны [19, с. 70; 20, с. 156], мы приведем их здесь, однако, так как они играют в дальнейшем важную роль.

Лемма 1. Для любого решения $x(t)$, $t \in I$, системы (1), график которого расположен в G, имеет место тождество

$$V^{(1)}(t, x(t)) \equiv \frac{dV(t, x(t))}{dt}, \quad t \in I.$$

Доказательство следует из формулы для производной сложной функции [21, с. 50].

Лемма 2. Дифференцируемая функция $U(t, x)$, $U: G \to \mathbf{R}$, представляет собой первый интеграл системы (1) тогда и только тогда, когда производная $U^{(1)}(t, x)$ в силу системы (1) тождественно в G обращается в нуль.

Необходимость. Пусть $U(t, x)$ есть первый интеграл системы (1). Тогда для любого решения $x(t)$ этой системы, применяя лемму 1, будем иметь тождества

$$U^{(1)}(t, x(t)) \equiv \frac{dU(t, x(t))}{dt} \equiv 0,$$

откуда при $t = t_0$ получим равенство $U^{(1)}(t_0, x(t_0)) = 0$, справедливое при всех значениях t_0 и $x(t_0)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть теперь $U^{(1)}(t, x) = 0$ при всех $(t, x) \in G$. Тогда для любого решения $x(t)$ системы (1) на основании леммы 1 будем иметь тождества

$$\frac{dU(t, x(t))}{dt} \equiv U^{(1)}(t, x(t)) \equiv 0,$$

а с ними и достаточность. $\triangle$

Из определения первого интеграла следует, что постоянная на G функция также является первым интегралом системы (1). Первый интеграл $U(t, x)$ будем называть невырожденным на G, если при всех $(t, x) \in G$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right|+\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial U(t,x)}{\partial x_i}\right|\neq 0.$$

Функцию $U(x)$ будем называть стационарным первым интегралом системы (1), если она не зависит от t и является первым интегралом системы (1).

Теорема 1. Для того чтобы система (1) с $n-1$ раз дифференцируемой по t правой частью имела в D невырожденный стационарный первый интеграл, необходимо выполнение тождества

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} & \frac{\partial f_2}{\partial t} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^{n-1} f_1}{\partial t^{n-1}} & \frac{\partial^{n-1} f_2}{\partial t^{n-1}} & \dots & \frac{\partial^{n-1} f_n}{\partial t^{n-1}} \end{vmatrix}(t,x)\equiv 0,\quad (t,x)\in D, \tag{2}$$

где f_i, $i=\overline{1;n}$, — компоненты вектор-функции f.

$\triangle$ Пусть $U(x)$ — стационарный первый интеграл системы (1). Тогда согласно лемме 2 должно выполняться тождество

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x_1} f_1(t,x)+\dots+\frac{\partial U(x)}{\partial x_n} f_n(t,x)\equiv 0. \tag{3}$$

Это означает, что при каждом фиксированном x функции $t\to f_i(t,x)$ линейно зависимы на интервале их существования. Поэтому вронскиан этих функций (левая часть тождества (2)) обязан обращаться в нуль. $\triangle$

Выясним условия, при которых система (1) имеет стационарный интеграл. Будем считать, что условия теоремы 1 выполнены. Составим систему линейных уравнений относительно неизвестных функций $\varphi_i(x)$:

$$\begin{gathered} \varphi_1(x)f_1(t,x)+\dots+\varphi_n(x)f_n(t,x)=0, \\ \varphi_1(x)\frac{\partial f_1}{\partial t}(t,x)+\dots+\varphi_n(x)\frac{\partial f_n}{\partial t}(t,x)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_1(x)\frac{\partial^{n-1} f_1}{\partial t^{n-1}}(t,x)+\dots+\varphi_n(x)\frac{\partial^{n-1} f_n}{\partial t^{n-1}}(t,x)=0. \end{gathered} \tag{4}$$

Теорема 2. Для того чтобы система (1) с $n-1$ раз дифференцируемой по t правой частью имела хотя бы один стационарный первый интеграл $U(x)$, необходимо и достаточно существование такого не зависящего от t решения $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ системы (4), для которого уравнение Пфаффа

$$\varphi_1(x)dx_1 + \ldots + \varphi_n(x)dx_n = 0 \tag{5}$$

интегрируется одним соотношением $U(x)=c$.

Необходимость. Пусть система (1) имеет стационарный интеграл $U(x)$. Тогда согласно лемме 2 должно выполняться тождество (3). Дифференцируя тождество (3) $n-1$ раз по t, убеждаемся в том, что совокупность функций $\varphi_i(x) \triangleq \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}$ — решение системы (4).

Достаточность. Пусть теперь система (4) имеет не зависящее от t решение, для которого уравнение Пфаффа (5) интегрируется одним соотношением $U(x)=c$. Тогда существует [20, с. 191] такая функция $M(x)$, для которой

$$M(x)\varphi_i(x) \equiv \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i=\overline{1; n}.$$

Поэтому

$$U^{(1)}(t, x) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} f_i(t, x) \equiv$$

$$\equiv M(x) \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) f_i(t, x) \equiv 0,$$

так как $\varphi_i(x)$ удовлетворяют первому уравнению системы (4). Из тождества $U^{(1)}(t, x) \equiv 0$ следует достаточность. $\triangle$

Теорема 3. Пусть система (4) имеет r линейно независимых при каждом x решений $\varphi_{1i}(x), \ldots, \varphi_{ni}(x)$, $i=\overline{1; r}$, для которых соответствующие уравнения Пфаффа

$$\varphi_{1i}(x)dx_1 + \ldots + \varphi_{ni}(x)dx_n = 0, \quad i=\overline{1; r},$$

интегрируются с помощью соотношений $U_i(x)=c_i$, $i=\overline{1; r}$. Тогда $U_i(x)$ представляют собой r независимых первых стационарных интегралов системы (1).

$\triangle$ Согласно теореме 2 функции $U_i(x)$ являются первыми интегралами системы (1). Покажем, что они независимы. Отметим, что для каждой функции $U_i(x)$ существует функция $M_i(x)$, для которой

$$\frac{\partial U_i(x)}{\partial x_j} = M_i(x)\varphi_{ji}(x), \quad i=\overline{1;r}, \ j=\overline{1;n}.$$

Поэтому матрица Якоби $\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)$ имеет вид

$$\left\|\begin{array}{cccc} M_1\varphi_{11} & M_1\varphi_{21} & \dots & M_1\varphi_{n1} \\ M_2\varphi_{12} & M_2\varphi_{22} & \dots & M_2\varphi_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_r\varphi_{1r} & M_r\varphi_{2r} & \dots & M_r\varphi_{nr} \end{array}\right\|.$$

Из линейной независимости векторов $\varphi_{1i}, \dots, \varphi_{ni}$, $i=\overline{1;r}$, при каждом x следует, что при всех x ранг матрицы Якоби равен r. Поэтому функции $U_i(x)$, $i=\overline{1;r}$, являются независимыми [22, с. 682]. △

Таким образом, вопрос о существовании независимых стационарных первых интегралов системы (1) сводится к вопросу о существовании независимых решений у алгебраической системы (4). Следующая теорема выделяет случай, когда существует ровно один независимый стационарный первый интеграл.

Теорема 4. Пусть выполнены все условия теоремы 1 и существует некоторое $t=\tau$, при котором уравнение Пфаффа

$$\left|\begin{array}{cccc} dx_1 & dx_2 & \dots & dx_n \\ f_1(\tau, x) & f_2(\tau, x) & \dots & f_n(\tau, x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial t}(\tau, x) & \frac{\partial f_2}{\partial t}(\tau, x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial t}(\tau, x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^{n-2} f_1}{\partial t^{n-2}}(\tau, x) & \frac{\partial^{n-2} f_2}{\partial t^{n-2}}(\tau, x) & \dots & \frac{\partial^{n-2} f_n}{\partial t^{n-2}}(\tau, x) \end{array}\right| = 0 \quad (6)$$

не вырождается в тождество и интегрируется одним соотношением $U(x)=c$. Тогда функция $U(x)$ является независимым стационарным первым интегралом системы (1). Всякий другой стационарный первый интеграл зависит от $U(x)$.

△ Так как уравнение (6) не вырождается в тождество, то для функций $t \to f_i(t, x)$, $i=\overline{1;n}$, переменного t при фиксированном x выполнены все условия примечания к теореме 2 из § 1. На основании этого примечания функции $t \to f_i(t, x)$ линейно зависимы. Соответствующие коэффициенты $\varphi_i(x)$ могут быть найдены путем разложения по элементам первой строки определителя

$$\begin{vmatrix} f_1(t, x) & f_2(t, x) & \ldots & f_n(t, x) \\ f_1(\tau, x) & f_2(\tau, x) & \ldots & f_n(\tau, x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial t}(\tau, x) & \frac{\partial f_2}{\partial t}(\tau, x) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial t}(\tau, x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^{n-2} f_1}{\partial t^{n-2}}(\tau, x) & \frac{\partial^{n-2} f_2}{\partial t^{n-2}}(\tau, x) & \ldots & \frac{\partial^{n-2} f_n}{\partial t^{n-2}}(\tau, x) \end{vmatrix}.$$

Эти коэффициенты образуют единственное с точностью до множителя решение $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ системы (4), которому соответствует уравнение Пфаффа вида (6). Ссылка на теорему 3 завершит доказательство. △

§ 3. Некоторые задачи, приводящие к изучению систем со стационарными интегралами

6

Рассмотрим дифференциальную систему порядка n

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x = (x^1, \ldots, x^n), \tag{1}$$

для простоты предполагая, что эта система задана для всех $(t, x) \in \mathbf{R}^{1+n}$. Повторяя систему (1) m раз (m — некоторое натуральное число), запишем следующую блочно-диагональную систему порядка mn:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = f(t, x_1) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_m}{dt} = f(t, x_m) \end{array}\right\}, \quad x_i = (x^1{}_i, \ldots, x^n{}_i). \tag{2}$$

Покажем, что существование стационарных интегралов у системы (2) связано с наличием определенных качественных свойств у системы (1), точнее, с наличием геометрических инвариантов у оператора $A_t : x \to \varphi(t, x)$, где $\varphi(\cdot, x)$ — решение системы (1) с начальными условиями $\varphi(0, x) = x$ (свойства оператора A_t см. [9; 23]). Кроме того, покажем, что существование n независимых стационарных интегралов у системы (2) равносильно возможности построения общего решения системы (1) по известным m решениям этой системы.

I. Рассмотрим для простоты двумерную систему

$$\frac{dx}{dt}=p(t, x, y), \frac{dy}{dt}=q(t, x, y), \tag{1a}$$

заданную во всем пространстве $\mathbf{R}^3$. Предполагая, что все решения системы (1a) определены при всех t, определим оператор сдвига A_t.

1. Пусть $(x_i(\cdot),\ y_i(\cdot))$, $i=1,\ 2,\ 3$, есть три произвольных решения системы (1a). При каждом t построим треугольник с вершинами в точках $M_i(x_i(t),\ y_i(t))$ (рис. 1), площадь которого

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \end{vmatrix}.$$

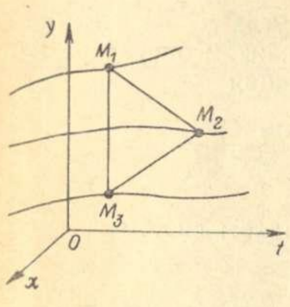

Рис. 1.

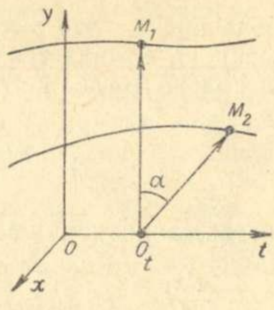

Рис. 2.

Предположим, что система (1a) такова, что для любых трех ее решений площадь S не зависит от времени t, т. е. является инвариантом оператора A_t. Тогда функция

$$V(x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ x_3, y_3)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

является стационарным интегралом системы

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt}&=p(t, x_1, y_1), \quad \frac{dy_1}{dt}=q(t, x_1, y_1),\\
\frac{dx_2}{dt}&=p(t, x_2, y_2), \quad \frac{dy_2}{dt}=q(t, x_2, y_2),\\
\frac{dx_3}{dt}&=p(t, x_3, y_3), \quad \frac{dy_3}{dt}=q(t, x_3, y_3).
\end{aligned} \tag{2a}
$$

Обратное тоже верно, т. е. если функция V — интеграл системы (2a), то площадь S треугольника $M_1M_2M_3$ — инвариант оператора A_t.

2. Пусть $(x_i(\cdot), y_i(\cdot))$, $i=1, 2$, — два произвольных решения системы (1a). Интерпретируя $x_i(t)$, $y_i(t)$ как координаты вектора $\overline{O_tM_i}$ (рис. 2), вычислим косинус угла $\alpha \stackrel{\Delta}{=} M_1O_tM_2$:

$$
\cos\alpha=\frac{x_1(t)x_2(t)+y_1(t)y_2(t)}{\sqrt{x^2_1(t)+y^2_1(t)}\ \sqrt{x^2_2(t)+y^2_2(t)}}\ .
$$

Отсюда видно, что величина угла α не изменяется во времени (т. е. является инвариантом оператора A_t) тогда и только тогда, когда функция

$$
\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x^2_1+y^2_1}\ \sqrt{x^2_2+y^2_2}}
$$

является стационарным интегралом системы

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt}&=p(t, x_1, y_1), \quad \frac{dy_1}{dt}=q(t, x_1, y_1),\\
\frac{dx_2}{dt}&=p(t, x_2, y_2), \quad \frac{dy_2}{dt}=q(t, x_2, y_2).
\end{aligned} \tag{2б}
$$

3. Площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\overline{O_tM_1}$ и $\overline{O_tM_2}$ (см. рис. 2), остается неизменной во времени тогда и только тогда, когда система (2б) имеет стационарный интеграл

$$
\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}=x_1y_2-x_2y_1.
$$

Сказанное выше распространяется на системы произвольных порядков. Пусть, например, $x_i(\cdot)$, $i=\overline{1;n+1}$, есть $n+1$ решений системы (1) порядка n. Считая точки $x_i(t)$, $i=\overline{1;n+1}$, вершинами симплекса S_t, вычислим его объем:

$$V(x_1(t),\dots,x_{n+1}(t))=\frac{1}{n!}\begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ x^1{}_1(t) & x^1{}_2(t) & \dots & x^1_{n+1}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n{}_1(t) & x^n{}_2(t) & \dots & x^n_{n+1}(t) \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что объем симплекса S_t не будет изменяться со временем тогда и только тогда, когда функция $V(x_1,\dots,x_{n+1})$ является интегралом системы (2) при $m=n+1$.

Пусть система (1) линейна. Тогда оператор сдвига A_t этой системы любую прямую в пространстве $\mathbf{R}^n$ преобразует в прямую. Так как, кроме того, вершине $x_i(0)$ симплекса S_0 оператор A_t ставит в соответствие вершину $x_i(t)$ симплекса S_t, то A_t преобразует симплекс S_0 в симплекс S_t. Поэтому оператор A_t сохраняет объемы симплексов тогда и только тогда, когда объем является интегральным инвариантом [7, с. 449—450] рассматриваемой линейной системы (1). Таким образом, объем является интегральным инвариантом линейной системы тогда и только тогда, когда соответствующая этой линейной системе система (2) при $m=n+1$ имеет V в качестве своего стационарного интеграла. В общем случае это утверждение неверно. Пример тому — система

$$\dot{x}=2tx^2y,\ \dot{y}=-2txy^2,$$

для которой объем является интегральным инвариантом, но которая не сохраняет объемов симплексов S_t.

Пусть $\varphi(\cdot,x)$ означает решение системы (1) с начальными условиями $\varphi(0,x)=x$, а $A_t: x\to\varphi(t,x)$ — оператор сдвига вдоль решений системы (1). Предположим, что система (1) задана при всех t и x, а ее решения определены на всей числовой оси. Тогда оператор A_t определен при всех t и областью его определения будет являться все $\mathbf{R}^n$.

Пусть $x_i=(x^1{}_i,\dots,x_i{}^n)$, $i=\overline{1;m}$, есть m произвольных точек или произвольных векторов пространства $\mathbf{R}^n$, с которыми связано существование некоторого геометрического объекта Γ_0 (например, многогранника), а некоторая характеристика F этого объекта (объем, мера угла) описывается с помощью функции $F(x_1, \ldots, x_m)$, т. е. является функцией только выбранных точек x_i, $i=\overline{1; m}$. Оператор A_t преобразует точки x_i в точки $\varphi(t, x_i)$. С точками $\varphi(t, x_i)$, $i=\overline{1; m}$, связано существование объекта Γ_t, аналогичного объекту Γ_0 с соответствующей характеристикой $F(\varphi(t, x_1), \ldots, \varphi(t, x_m))$. (Сам объект Γ_t может и не быть образом объекта Γ_0.)

Предположим теперь, что характеристика F зависит только от первоначально выбранных точек x_i и не зависит от времени t, т. е. при любых $t, x_1, \ldots, x_m$ выполняется равенство

$$F(\varphi(t, x_1), \ldots, \varphi(t, x_m)) = F(x_1, \ldots, x_m).$$

Записанное равенство показывает, что функция F — первый интеграл системы (2). Обратное, очевидно, тоже верно, так как если функция F — первый интеграл системы (2), то характеристика F не зависит от t, т. е. является инвариантом оператора A_t, каковы бы ни были точки x_i, на которых построен объект Γ_0. Таким образом, следующие два условия эквивалентны: 1) характеристика F зависит только от первоначально выбранных точек x_i, $i=\overline{1; m}$, и не зависит от времени t; 2) функция $F(x_1, \ldots, x_m)$ — первый интеграл системы (2). Из равноправия точек x_i следует, что функция F — симметрическая.

Интересно отметить, что если характеристика F — инвариант оператора A_t не для всех, а только для некоторых фиксированных точек $x^0_1, \ldots, x^0_m$, то соотношение

$$F(x_1, \ldots, x_m) = F(x^0_1, \ldots, x^0_m)$$

представляет собой частный интеграл системы (2), не зависящий от t. (Системы с известными частными алгебраическими интегралами изучались в работах Н. А. Лукашевича, А. И. Яблонского и их учеников. Отправным пунктом для них была работа Н. П. Еругина [24].)

В связи с изложенным представляет интерес следующий вопрос: что можно сказать о системе (1), если система (2) имеет стационарный интеграл (частный стационарный интеграл), обладающий определенными свойствами?

II. Пусть $\overline{x}_1(t), \ldots, \overline{x}_{m-1}(t)$ есть $m-1$ решений системы (1), определенных на некотором общем интервале I, а D — некоторая область в $\mathbf{R}^n$.

Совокупность решений $\overline{x}_1(t), \ldots, \overline{x}_{m-1}(t)$ системы (1) будем называть $(m-1)$-базисом системы (1) в области $I \times D$, если существует дифференцируемая вектор-функция

$$\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)^T, \ \Phi(x, x_1, \ldots, x_{m-1}), \ x \in D, \ x_i \in D,$$
$$\Phi : D^m \to \mathbf{R}^n,$$

обладающая следующими свойствами: 1) для любых решений $x(t)$, $x_1(t), \ldots, x_{m-1}(t)$ системы (1) верно соотношение $\Phi(x(t), x_1(t), \ldots, x_{m-1}(t)) = \text{const}$; 2) каждое решение $x(t)$, для которого $(t, x(t)) \in I \times D$, можно получить как решение системы уравнений

$$\Phi(x, \overline{x}_1(t), \ldots, \overline{x}_{m-1}(t)) = c, \tag{3}$$

где $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$ — некоторый постоянный вектор, соответствующий рассматриваемому решению $x(t)$.

Будем говорить, что общее решение системы (1) определяется конечным числом решений ($m-1$ решениями) этой системы, если область задания системы можно покрыть конечным или счетным множеством подобластей вида $I \times D$, в каждой из которых система (1) имеет $(m-1)$-базис с вектор-функцией Φ, представляющей сужение на D^m некоторой вектор-функции F, общей для всех подобластей.

Пример. Рассмотрим уравнение $\dot{x} = x^2$, $t \in \mathbf{R}$, $x > 0$, с общим решением $x = \dfrac{1}{c-t}$, $t < c$. Область задания уравнения покроем областями

$$G_k \triangleq \{(t, x) : t < k\}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

В качестве функции F возьмем функцию

$$F(x, x_1) \triangleq \frac{1}{x} - \frac{1}{x_1}, \ x > 0, \ x_1 > 0.$$

Тогда в каждой области G_k у рассматриваемого уравнения существует базис $\overline{x}_k(t) = \dfrac{1}{k-t}$, $t < k$. Поэтому общее

решение рассматриваемого уравнения определяется од-
ним решением этого уравнения.

Нетрудно показать, что если $\varphi(x)$ и $f(t)$ — непре-рывные функции, определенные на интервалах I и I_1 соответственно, и если $\varphi(x)\neq 0$ для $x\in I$, то общее решение уравнения $\dot{x}=\varphi(x)f(t)$ определяется одним решением. Соответствующая функция

$$F(x, x_1)=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{ds}{\varphi(s)}-\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{ds}{\varphi(s)}.$$

Как следует из общей теории линейных систем, для любой линейной системы с непрерывными коэффициентами (как однородной, так и неоднородной) всегда существует базис, а ее общее решение определяется конечным числом ее решений. Примером нелинейных систем, общее решение которых определяется конечным числом решений, могут служить уравнение Риккати [2, с. 50; 18, с. 116], а также уравнения Дарбу [25]. При этом для нелинейных систем, как правило, нельзя указать «глобального» базиса, как в случае линейных систем, хотя для них существуют локальные базисы. Это происходит потому, что существование базиса у системы (1) связано с существованием стационарных первых интегралов у системы (2). Имеет место

Теорема 1. Система (1), решения которой в области $I\times D$ единственным образом определяются своими начальными условиями и продолжимы на весь интервал I, имеет $(m-1)$-базис в области $I\times D$ тогда и только тогда, когда система (2) в области D^m имеет n стационарных первых интегралов $\Phi_i(x, x_1, \ldots, x_{m-1})$, $i=\overline{1; n}$, для которых соотношения (3) разрешимы относительно x при некоторых решениях $\bar{x}_1(t), \ldots, \bar{x}_{m-1}(t)$ системы (1).

Необходимость. Пусть у системы (1) в области $I\times D$ существует базис $\bar{x}_1(t), \ldots, \bar{x}_{m-1}(t)$. Тогда, как следует из определения базиса и продолжимости всех решений системы (1) на интервал I, функции $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ являются стационарными интегралами системы (2) в области D^m и для них соотношения (3) разрешимы относительно x.

Достаточность. Пусть теперь нам удалось отыскать n заданных в области D^m стационарных первых интегралов системы (2), для которых соотношения (3) при некоторых решениях $\bar{x}_1(t), \ldots, \bar{x}_{m-1}(t)$ системы (1) разрешимы относительно x. Тогда эти решения по определению образуют базис. $\triangle$

Таким образом, возможность определения общего решения системы (1) по конечному числу ее решений эквивалентна существованию совокупности n независимых стационарных интегралов системы (2).

Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$\dot{x}=a_1(t)\varphi_1(x)+\ldots+a_n(t)\varphi_n(x). \tag{4}$$

Функции $a_i(t)$ будем считать достаточное число раз дифференцируемыми в интервале определения. Соответствующая система (2) для этого уравнения будет иметь вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=a_1(t)\varphi_1(x_1)+\ldots+a_n(t)\varphi_n(x_1),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot{x}_m&=a_1(t)\varphi_1(x_m)+\ldots+a_n(t)\varphi_n(x_m).\end{aligned} \tag{2в}$$

В соответствии с вышеизложенным общее решение уравнения (4) будет определяться конечным числом (числом m) решений этого же уравнения, если система (2в) будет иметь хотя бы один стационарный интеграл. Согласно § 2, для того чтобы сказанное имело место, необходимо выполнение тождества

$$\begin{vmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(t)\varphi_i(x_1) & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n}a_i(t)\varphi_i(x_m)\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a'_i(t)\varphi_i(x_1) & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n}a'_i(t)\varphi_i(x_m)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{(m-1)}(t)\varphi_i(x_1) & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{(m-1)}(t)\varphi_i(x_m)\end{vmatrix}\equiv 0.$$

Это тождество справедливо для произвольных функций $a_i(t)$, если $m\geqslant n+1$. (Это следует из линейной зависимости $n+1$ векторов размерности n.) Пусть $m\geqslant n+1$ и F — искомый стационарный интеграл системы (2в). Тогда тождественно по $t, x_1, \ldots, x_m$ выполнено соотношение

$$F_1\sum_{i=1}^{n}a_i(t)\varphi_i(x_1)+\ldots+F_m\sum_{i=1}^{n}a_i(t)\varphi_i(x_m)\equiv 0,$$

где $F_i \triangleq \dfrac{\partial F}{\partial x_i}$. Отсюда получим тождество

$$a_1(t)\sum_{k=1}^{m} F_k\varphi_1(x_k)+\ldots+a_n(t)\sum_{k=1}^{m} F_k\varphi_n(x_k)\equiv 0,$$

которое выполняется для любых функций $a_i(t)$ тогда только тогда, когда

$$\begin{aligned} &F_1\varphi_1(x_1)+\ldots+F_n\varphi_1(x_n)+F_{n+1}\varphi_1(x_{n+1})+\ldots\\ &\qquad\ldots+F_m\varphi_1(x_m)\equiv 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &F_1\varphi_n(x_1)+\ldots+F_n\varphi_n(x_n)+F_{n+1}\varphi_n(x_{n+1})+\ldots\\ &\qquad\ldots+F_m\varphi_n(x_m)\equiv 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Выражая по правилу Крамера из этой системы $F_1, \ldots, F_n$ через $F_{n+1}, \ldots, F_m$, получим соотношения, эквивалентные предыдущим:

$$\Delta\cdot F_i = -\sum_{k=n+1}^{m} F_k\cdot\Delta_{ik},\; i=\overline{1;n}, \tag{6}$$

где

$$\Delta \triangleq \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_1(x_n)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi_n(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{ik} \triangleq \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_1(x_{i-1}) & \varphi_1(x_k) & \varphi_1(x_{i+1}) & \ldots & \varphi_1(x_n)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi_n(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_{i-1}) & \varphi_n(x_k) & \varphi_n(x_{i+1}) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

Для дифференциала функции F имеем соотношения

$$\Delta\cdot dF \equiv \Delta\sum_{i=1}^{m} F_i dx_i \equiv \sum_{k=n+1}^{m}\Delta\cdot F_k dx_k + \sum_{i=1}^{n}\Delta\cdot F_i dx_i \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=n+1}^{m} F_k\Delta dx_k - \sum_{i=1}^{n} dx_i \sum_{k=n+1}^{m} F_k\Delta_{ik} \equiv \sum_{k=n+1}^{m} F_k\Big[\Delta dx_k - \sum_{i=1}^{n}\Delta_{ik}dx_i\Big] \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=n+1}^{m} F_k \begin{vmatrix} dx_k & dx_1 & dx_2 & \ldots & dx_n\\ \varphi_1(x_k) & \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \ldots & \varphi_1(x_n)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi_n(x_k) & \varphi_n(x_1) & \varphi_n(x_2) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Таким образом, если F — искомый интеграл, то е[го] дифференциал можно записать в форме (7). Поэто[му] F — решение вполне интегрируемого уравнения Пфаффа вида

$$\sum_{k=n+1}^{m} P_k \begin{vmatrix} dx_k & dx_1 & dx_2 & \dots & dx_n \\ \varphi_1(x_k) & \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_n(x_k) & \varphi_n(x_1) & \varphi_n(x_2) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} = 0, \quad (8)$$

где P_k — некоторые функции переменных $x_1, \dots, x_m$.

Пусть теперь существуют функции P_k, для которых уравнение (8) вполне интегрируемо, а функция F — его интеграл. Тогда, используя (7), для производных $\frac{\partial F}{\partial x_i} \triangleq F_i$ получим соотношения $F_k = P_k \cdot \Delta$, $k = \overline{(n+1); m}$, и $F_i = -\sum_{k=n+1}^{m} P_k \Delta_{ik}$, $i = \overline{1; n}$. Из этих соотношений следует, что производные $F_1, \dots, F_n$ удовлетворяют системе (5) и потому сама функция F является стационарным интегралом системы (2в). Из приведенных рассуждений следует

Теорема 2. Пусть 1) функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ таковы, что при некотором m существуют функции P_k, $k = \overline{(n+1); m}$, независимых переменных $x_1, \dots, x_m$, для которых уравнение Пфаффа (8) интегрируемо одним соотношением

$$F(x_1, \dots, x_m) = c;$$

2) существуют решения $x_1(t), \dots, x_{m-1}(t)$ уравнения (4), для которых

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x_1(t), \dots, x_{m-1}(t), x) \neq 0 \text{ при любых } t \text{ и } x.$$

Тогда соотношение $F(x_1(t), \dots, x_{m-1}(t), x) = c$ определяет общее решение уравнения (4), каковы бы ни были функции $a_1(t), \dots, a_n(t)$.

Пример. Рассмотрим уравнение Бернулли

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^2.$$

В нашем случае соответствующее уравнение Пфаффа имеет вид

$$\sum_{k=3}^{m} P_k \begin{vmatrix} dx_k & dx_1 & dx_2 \\ x_k & x_1 & x_2 \\ x_k^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Полагая $m=3$ и сокращая на P_3, получаем уравнение Пфаффа, интегрируемое одним соотношением $\frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} \cdot \frac{x_1}{x_2} = c$.

Поэтому соотношение $\frac{x_2(t)-x}{x_1(t)-x}\cdot\frac{x_1(t)}{x_2(t)}=c$, где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — известные решения уравнения Бернулли, определяет общее решение этого уравнения.

§ 4. Системы с φ-решениями

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x}=X(t,x),\ x=(x_1,\ldots,x_n)^T,\ (t,x)\in D, \qquad (X)$$

считая ее непрерывной в области $D\subset\mathbf{R}^{1+n}$. Наряду с этой системой рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_0(t,x),\ \varphi_1(t,x),\ \varphi_2(t,x),\ldots\ . \qquad (\varphi)$$

Будем считать, что каждая из функций φ_i задана, как и система (X), в области D.

Определение. Решение $x(t)$, $t\in I$, системы (X) называется φ-решением порядка r по отношению к последовательности (φ), если функции $\varphi_i(t,x(t))$, $i=\overline{1;r}$, одного переменного t линейно зависимы на I, а для любого $m<r$ функции $\varphi_i(t,x(t))$, $i=\overline{1;m}$, линейно независимы на I.

Примеры. 1. Решение $(x(t),y(t))$ двумерной автономной системы

$$\dot{x}=P(x,y),\ \dot{y}=Q(x,y)$$

является φ-решением по отношению к последовательности $1,x,y,x^2,xy,y^2,\ldots$ тогда и только тогда, когда этому решению соответствует алгебраическая траектория.

2. Решение $x(t)$ скалярного уравнения вида $\dot{x}=f(t,x)$ является φ-решением по отношению к последовательности функций x, 1, $\cos t$, $\sin t$, $\cos 2t$, $\sin 2t,\ldots$ тогда и только тогда, когда оно в своем интервале определения совпадает с некоторым тригонометрическим многочленом, т. е. когда $x(t)=a_0+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\sin it+b_i\cos it$.

3. Решение скалярного уравнения является φ-решением порядка r по отношению к последовательности функций $x,1,t,t^2,t^3,\ldots$ тогда и только тогда, когда это решение совпадает в своем интервале определения с некоторым многочленом степени $r-1$.

4. Решение $x(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))^T$ системы (X) является φ-решением порядка r по отношению к последовательности

$$X_1^{(0)}(t,x)\triangleq x_1,\ X_1^{(1)}(t,x)\triangleq X_1(t,x),\ldots,$$

$$X_1^{(k+1)}(t,x)\triangleq\frac{\partial X_1^{(k)}}{\partial t}+\frac{\partial X_1^{(k)}}{\partial x}X(t,x),\ldots,$$

где $X_1(t,x)$ — первая компонента вектор-функции $X(t,x)$, если первая компонента $x_1(t)$ этого решения является решением некоторого линейного однородного стационарного дифференциального уравнения порядка r.

Теорема 1. Пусть вектор-функция $X(t,x)$ и функции $\varphi_i(t,x)$ голоморфны в области D. Тогда все решения системы (X) будут φ-решениями порядка не выше m по отношению к последовательности (φ) тогда и только тогда, когда выполнено тождество

$$|\varphi_0,\ldots,\varphi_m|(t,x)\triangleq\begin{vmatrix}\varphi_0^{(0)} & \ldots & \varphi_m^{(0)}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi_0^{(m)} & \ldots & \varphi_m^{(m)}\end{vmatrix}(t,x)\equiv 0,\ (t,x)\in D,$$

где $\varphi_s^{(0)}\triangleq\varphi_s$, а $\varphi_s^{(k+1)}\triangleq\frac{\partial\varphi_s^{(k)}}{\partial t}+\frac{\partial\varphi_s^{(k)}}{\partial x}X$ есть производная в силу системы (X) от функции $\varphi_s^{(k)}$.

Необходимость. Пусть все решения системы (X) являются φ-решениями порядка не выше m. Возьмем произвольную точку $(t_0,x_0)\in D$. Через эту точку проведем решение $x(t)$, $t\in I$, $x(t_0)=x_0$, системы (X). По условию оно является φ-решением порядка не выше m. Поэтому функции $\varphi_i(t,x(t))$, $i=\overline{1;m}$, линейно зависимы и, значит, при всех $t\in I$ выполнено $|\varphi_0,\ldots,\varphi_m|(t,x(t))=0$. Откуда, считая $t=t_0$, получим равенство $|\varphi_0,\ldots,\varphi_m|(t_0,x_0)=0$, из которого в силу произвольности выбора точки (t_0,x_0) следует необходимость.

Достаточность. Пусть $x(t)$, $t\in I$, — некоторое решение системы (X). В силу теоремы Коши [26, с. 55] решение $x(t)$ является аналитической функцией. Поэтому функции $\Phi_i(t)\triangleq\varphi_i(t,x(t))$, $i=\overline{1;m}$, также аналитические. Для вронскиана этих функций имеем

$$|\Phi_0,\ldots,\Phi_m|(t)=|\varphi_0,\ldots,\varphi_m|(t,x(t))=0,\ t\in I.$$

Поэтому (см. следствие 2 из теоремы 2 из § 1) они линейно зависимы на I. Δ

П р и м е ч а н и е 1. Теорема 1 верна и в том случае, когда функции φ_i и вектор-функция X имеют частные производные до порядка m включительно, а

$$|\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}|(t, x) \neq 0, \ \forall (t, x) \in D.$$

П р и м е ч а н и е 2. Согласно § 1 из условия

$$|\varphi_0, \ldots, \varphi_m|\,|(t, x) \equiv 0, \ (t, x) \in D,$$

вытекает справедливость следующего тождества:

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(t, x(t)) & \ldots & \varphi_m(t, x(t)) \\ \varphi_0^{(0)}(t_0, x_0) & \ldots & \varphi_m^{(0)}(t_0, x_0) \\ \varphi_0^{(1)}(t_0, x_0) & \ldots & \varphi_m^{(1)}(t_0, x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0^{(m-1)}(t_0, x_0) & \ldots & \varphi_m^{(m-1)}(t_0, x_0) \end{vmatrix} \equiv 0, \ t, t_0 \in I. \qquad (1)$$

Здесь $x(t)$, $t \in I_0$, есть решение системы (X) с начальными условиями $x(t_0) = x_0$ и интервалом определения I_0. Интервал $I = I_0$, если выполнены условия теоремы 1 или примечания 1, и $I \subset I_0$ — в остальных случаях.

П р и м е ч а н и е 3. Если $X(t, x) \equiv X(x)$, $\varphi_i(t, x) \equiv \varphi_i(x)$ — голоморфные функции и $x(t)$ является φ-решением системы (X) порядка не выше m, то условие $|\varphi_0, \ldots, \varphi_m|(t, x) = 0$ выполнено вдоль траектории, соответствующей этому решению. Поэтому траектории всех φ-решений системы (X) порядка не выше m принадлежат множеству

$$M \stackrel{\Delta}{=} \{x : |\varphi_0, \ldots, \varphi_m|(x) = 0\}.$$

Верно и обратное: если траектория автономной системы (X) принадлежит множеству M, то каждое решение системы (X), соответствующее этой траектории, является φ-решением порядка не выше m. Поэтому если для некоторой непрерывной функции $W(x)$ и постоянных a_i, $i = \overline{0; m}$, выполняется тождество

$$|\varphi_0, \ldots, \varphi_m| \equiv [a_0\varphi_0 + \ldots + a_m\varphi_m]\, W,$$

то множество

$$\{x : a_0\varphi_0(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x) = 0\}$$

состоит из целых траекторий системы (X). Здесь и далее под целой траекторией понимается траектория, соответствующая продолженному решению, которое не обязательно определено на всей прямой. Δ Это примечание будет следовать из теоремы 1, если вместо системы (X) рассмотреть ее сужение на соответствующую траекторию. Δ

В дальнейшем нам понадобится аналог теоремы единственности для голоморфной функции нескольких переменных [17, с. 285]. Этот аналог дает следующая

11 **Лемма о единственности голоморфной функции.** Пусть 1) $f(x_1, \ldots, x_n)$ — голоморфная в параллелепипеде $D \stackrel{\Delta}{=}]a_1; b_1[\times]a_2; b_2[\times \ldots \times]a_n; b_n[$ функция;

2) существуют множества $Y_i \subset]a_i; b_i[$, $i = \overline{1; n}$, каждое из которых имеет конечную предельную точку и

$$f(y_1, \ldots, y_n) = 0, \ \forall (y_1, \ldots, y_n) \in Y_1 \times \ldots \times Y_n.$$

Тогда $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ при всех $(x_1, \ldots, x_n) \in D$.

Δ Рассмотрим функцию F_1 одного переменного x_1, определяемую равенством $F_1(x_1) \stackrel{\Delta}{=} f(x_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$, где каждое y_i фиксировано в соответствующем Y_i. Функция $F_1(x_1)$ голоморфна и обращается в нуль на Y_1. На основании теоремы единственности для голоморфных функций одной переменной [17, с. 104] имеем

$$F(x_1) \equiv 0, \ x_1 \in]a_1; b_1[. \qquad (2)$$

Тождество (2) выполняется при всех $(y_2, \ldots, y_n) \in Y_2 \times \ldots \times Y_n$. Пусть $F_2(x_1, x_2) \stackrel{\Delta}{=} f(x_1, x_2, y_3, \ldots, y_n)$. Покажем, что $F_2(x_1, x_2) = 0$ при всех $(x_1, x_2) \in]a_1; b_1[\times]a_2; b_2[$, для чего возьмем произвольную точку $(x_1^0, x_2^0) \in]a_1; b_1[\times]a_2; b_2[$ и рассмотрим функцию одного переменного $\Phi(x_2) \stackrel{\Delta}{=} F_2(x_1^0, x_2)$. Из тождества (2) следуют соотношения

$$\Phi(y_2) = F_2(x_1^0, y_2) = F_1(x_1^0) = 0, \ \forall y_2 \in Y_2.$$

Поэтому $\Phi(x_2) = 0$ при всех $x_2 \in]a_2; b_2[$. В частности, при $x_2 = x_2^0$ получим соотношения

$$F_2(x_1^0, x_2^0) = \Phi(x_2^0) = 0, \text{ т. е. } F_2(x_1, x_2) \equiv 0.$$

Применяя метод индукции, докажем лемму. Δ

П р и м е р. Пусть $f(x, y)$ — голоморфная в окрестности точки $(0, 0)$ функция, для которой при всех натуральных m и n верны равенства $f\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) = f(0, 0) = 0$. Тогда согласно доказанной лемме $f(x, y) = 0$ при всех (x, y) из области голоморфности функции f. Обычно [27, с. 17], формулируя теоремы единственности для голоморфных функций нескольких переменных, предполагают, что мера множества нулей функции положительна. В рассматриваемом примере мера множества известных нулей функции f равна нулю.

2. Зак. 2348

12 **Теорема 2.** Пусть вектор-функция $X(t, x)$ и все фун
ции $\varphi_i(t, x)$ голоморфны в области D, а все решени
системы (X) являются φ-решениями по отношению к п
следовательности (φ). Тогда порядок всякого решени
системы (X) не превосходит некоторого числа r, т.
порядки решений голоморфной системы равномерно о
раничены.

△ Определим множества M_m следующим образом:

$$M_m \triangleq \{(t, x)\in D : |\varphi_0, \dots, \varphi_m|(t, x)=0\}$$

(см. теорему 1). Так как каждая точка $(t, x)\in D$ лежи
на графике некоторого φ-решения $x(t)$, то согласно те
реме 1 эта точка принадлежит хотя бы одному множ
ству M_m. Поэтому область D будет представлена ка
объединение счетного числа множеств M_m. По теорем
Бэра [28, с. 70], замыкание $\overline{M}_r$ хотя бы одного множ
ства M_r содержит некоторый шар B. Тогда из определе
ния множества M_r следует справедливость тождеств
$W_r(t, x)\equiv 0$, $(t, x)\in B$, где $W_r(t, x)\triangleq |\varphi_0, \dots, \varphi_r|(t, x$
В силу голоморфности функции $W_r(t, x)$ это равенств
будет выполняться и для всех $(t, x)\in D$. Поэтому ссылк
на теорему 1 завершит доказательство. △

С л е д с т в и е. Пусть вектор-функция $X(t, x)$ и фун
ции $\varphi_i(t, x)$ голоморфны в области D. Тогда каждое р
шение системы (X) есть φ-решение по отношени
к последовательности (φ) тогда и только тогда, когд
существует натуральное число r, для которо
$|\varphi_0, \dots, \varphi_r|(t, x)\equiv 0$ при всех $(t, x)\in D$.

Необходимость. Если каждое решение системы $(X$
есть φ-решение, то в соответствии с теоремой 2 порядк
этих φ-решений равномерно ограничены сверху неко
рым числом r. По теореме 1 для этого числа выполне
тождество $|\varphi_0, \dots, \varphi_r|(t, x)\equiv 0$.

Достаточность следует из теоремы 1. △

13 § 5. Системы с алгебраическими траекториям

Пусть заданы двумерная система дифференциальны
уравнений

$$\dot{x}=P(x, y),\ \dot{y}=Q(x, y),\ (x, y)\in D, \quad (1$$

и последовательность функций

$$1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ x^3, \dots, \quad (2$$

а $(x(t), y(t))$ — решение системы (1), определенное на некотором интервале I. Множество $T \triangleq \{(x(t), y(t)) : t \in I\}$ называется траекторией системы (1). Траекторию назовем алгебраической, если она представляет собой алгебраическую кривую или часть алгебраической кривой. Таким образом, если T — алгебраическая траектория, то существуют постоянные a_{ij}, для которых

$$a_{00}+a_{10}x(t)+a_{10}y(t)+a_{20}x^2(t)+\ldots+a_{rs}x^r(t)y^s(t)\equiv 0.$$

Поэтому траектория системы (1), соответствующая решению $(x(t), y(t))$, будет алгебраической тогда и только тогда, когда указанное решение является φ-решением по отношению к последовательности (2). Этот факт позволяет переформулировать все результаты предыдущего параграфа в терминах алгебраических траекторий. Сформулируем здесь результаты, соответствующие теоремам 1, 2 и следствию из теоремы 2 § 4. При этом под словом «порядок» будем понимать порядок алгебраической кривой.

Теорема 1. Для того чтобы все траектории системы (1) с достаточное число раз дифференцируемой правой частью были алгебраическими порядка не выше m, необходимо и достаточно выполнение тождества

$$|1, x, y, x^2, xy, y^2, \ldots, y^m| \overset{x,y}{\equiv} 0$$

(слева в этом тождестве стоит соответствующий вронскиан, вычисленный в силу системы (1)).

Теорема 2. Пусть функции P и Q голоморфны в области D, а все траектории системы (1) алгебраические. Тогда порядок всякой траектории ограничен сверху некоторым числом, не зависящим от траектории.

Теорема 3. Для того чтобы все траектории системы (1) с голоморфной правой частью были алгебраическими, необходимо и достаточно существование такого числа m, при котором выполнено тождество

$$|1, x, y, x^2, xy, y^2, \ldots, y^m| \equiv 0, \ (x, y) \in D.$$

Используя эти теоремы и специфику систем с алгебраическими траекториями, можно получить другие результаты.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}=P_n+P_{n+1}+\ldots, \ \dot{y}=Q_n+Q_{n+1}+\ldots \tag{3}$$

с голоморфной в области D правой частью, где $P_i=$ $=P_i(x, y)$ и $Q_i=Q_i(x, y)$ — однородные многочлены ст пени i. Будем считать, что $P_n^2+Q_n^2\not\equiv 0$ в области D.

Наряду с системой (3) будем рассматривать такж укороченную систему

$$\dot{x}=P_n,\quad \dot{y}=Q_n. \qquad (4$$

Справедлива следующая

Теорема 4. Если все траектории системы (3) алг браические порядка не выше m, то все траектории си стемы (4) также алгебраические порядка не выше m.

При доказательстве этой теоремы будет использо вана

Лемма. Отличный от тождественного нуля вронски $W_4\triangleq|1, x, y, x^2, \ldots, y^m|_4$, вычисленный в силу систем (4), представляет собой однородный многочлен степен

$$N\triangleq\frac{1}{24}m(m+1)(m+2)\,[8+3(m+3)(n-1)]. \qquad (5$$

Доказательство леммы. Заметим преж всего, что

$$W_4=|1, x, y, x^2, \ldots, y^m|_4=$$

$$=\left|\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d(x^2)}{dt}, \ldots, \frac{d(y^m)}{dt}\right|_4.$$

Запишем на месте каждого элемента матрицы пр вой части степень этого элемента (каждый элемент ма рицы, в чем нетрудно убедиться с помощью прост вычислений, представляет собой однородный многочл или тождественный нуль). Получим следующую та лицу:

$$\left\|\begin{matrix} 1+\ (n-1) & 1+\ (n-1) & 2+\ (n-1) & \ldots & m+\ (n-1)\\ 1+2(n-1) & 1+2(n-1) & 2+2(n-1) & \ldots & m+2(n-1)\\ 1+3(n-1) & 1+3(n-1) & 2+3(n-1) & \ldots & m+3(n-1)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1+k(n-1) & 1+k(n-1) & 2+k(n-1) & \ldots & m+k(n-1)\end{matrix}\right\|$$

где $k=2+3+4+\ldots+(m+1)=\dfrac{m(m+3)}{2}$. Каждое сл гаемое в раскрытом определителе W_4 содержит в кач стве сомножителей по одному элементу из каждой стр

ки и каждого столбца. Поэтому в этом слагаемом, если оно отлично от тождественного нуля, все сомножители имеют степени вида $j+i(n-1)$. Причем j в каждом слагаемом принимает два раза значение, равное единице, три раза, равное двум, и т. д. Сумма всех j, встречающихся в одном слагаемом, может быть вычислена по формуле

$$\Sigma j=2\cdot 1+3\cdot 2+\ldots+(m+1)m=\frac{m}{3}(m+1)(m+2).$$

Символ i в каждом слагаемом принимает значения $1, 2, \ldots, k$ по одному разу каждое. Поэтому

$$\Sigma i=1+2+\ldots+k=\frac{m}{8}(m+1)(m+2)(m+3).$$

Тогда степень каждого слагаемого в определителе W_4 равна

$$\Sigma[j+(n-1)i]=\Sigma j+(n-1)\Sigma i=N,$$

где N определено формулой (5). $\triangle$

Доказательство теоремы 4. Заметим предварительно, что верно тождество для определителей

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1n}+b_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \ldots & a_{nn}+b_{nn}\end{vmatrix}\equiv\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}+\Sigma\Delta_i, \qquad (6)$$

где Δ_i — определитель, каждый столбец которого состоит из элементов типа a_{ij} или типа b_{ij}. Причем в каждом Δ_i обязательно присутствует хотя бы один столбец, составленный из элементов b_{ij}.

Пусть теперь $R=R_r+S$ — голоморфная в области D функция переменных (x, y), где $R_r=R_r(x, y)$ — однородный многочлен от x, y степени r, а $S=S(x, y)$ — голоморфная в области D функция, разложение которой в окрестности точки $(0, 0)$ начинается с членов степени не ниже $r+1$. Условимся, что $R^{(k;\,3)}$ и $R^{(k;\,4)}$ обозначают производные k-го порядка от R в силу систем (3) и (4). Производную k-го порядка в силу системы (4) от однородного многочлена R_r степени r будем обозначать знаком $R_\nu^{(k;\,4)}$, где ν — степень многочлена $R_\nu^{(k;\,4)}$.

Вычислим производную $R^{(1;\,3)}$ от R в силу системы

(3). Совокупность членов с самыми низкими степеням[и] в $R^{(1;\,3)}$ будет вычисляться по формуле

$$\frac{\partial R_r}{\partial x}P_n+\frac{\partial R_r}{\partial y}Q_n=R^{(1;\,4)}_{r+(n-1)}$$

и представлять собой однородный многочлен степен[и] $r+(n-1)$, равный производной от R_r в силу системы (4) (этот многочлен может быть и тождественным нулем). Методом индукции легко доказать, что совокупност[ь] членов самых низких степеней в производной $R^{(k;\,3)}$ бу[-]дет представлять собой производную $R^{(k;\,4)}_{r+k(n-1)}$ k-г[о] порядка от функции R_r, которая является либо однород[-]ным многочленом степени $r+k(n-1)$, либо тождествен[-]ным нулем. Таким образом, верно следующее соотноше[-]ние:

$$R^{(k;\,3)}=R^{(k;\,4)}_{r+k(n-1)}+S_k, \tag{7}$$

где S_k — голоморфная в области D функция, разложе[-]ние которой в окрестности точки $(0, 0)$ начинается с[о] степеней более высоких, чем $r+k(n-1)$.

Пусть $W_i\overset{\Delta}{=}|1, x, y, x^2, \ldots, y^m|_i$, $i=3$, 4, — соответст[-]вующий вронскиан, вычисленный в силу системы «i» ($i=3, 4$). Тогда из соотношений (6) и (7) будет выте[-]кать соотношение

$$W_3=W_4+\Sigma\Delta_i, \tag{8}$$

где $\Sigma\Delta_i$ — голоморфная в области D функция, разложе[-]ние которой в окрестности точки $(0, 0)$ начинается [с] членов, степень которых выше, чем степень определите[-]ля W_4.

По условию все траектории системы (3) — алгебраи[-]ческие. Поэтому согласно теореме 3 существует тако[е] число m, при котором $W_3(x, y)\equiv 0$. Но тогда из тожде[-]ства (8) получим соотношение $W_4\equiv 0$, из которого н[а] основании той же теоремы 3 следует, что все траектори[и] системы (4) — алгебраические порядка не выше m. Δ

Следствие. Пусть 1) λ_1 и λ_2 — корни уравнени[я]

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0;$$

2) ни один из корней не обращается в нуль; 3) отно[-]шение этих корней λ_1/λ_2 не является рациональны[м] числом. Тогда система дифференциальных уравнени[й]

$$\dot{x}=a_{11}x+a_{12}y+P_2+P_3+\ldots, \qquad \dot{y}=a_{21}x+a_{22}y+Q_2+Q_3+\ldots \tag{6}$$

имеет трансцендентные (неалгебраические) траектории. △ Могут представиться два случая: 1) корни $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ комплексные; 2) корни $\lambda_1\neq\lambda_2$ действительные.

В первом случае $\alpha\neq 0$, так как λ_1/λ_2 не может быть рациональным числом. Поэтому начало координат для системы (9) является фокусом, а всякая прямая, проходящая через начало координат, имеет бесконечно много точек пересечения с любой траекторией (спиралью), приближающейся к началу координат. Поэтому всякая такая траектория не может быть алгебраической, ибо алгебраическая кривая может иметь с прямой только конечное число точек пересечения.

Пусть теперь $\lambda_1\neq\lambda_2$ — действительные числа, а их отношение — иррациональное число. Рассмотрим укороченную систему

$$\dot{x}=a_{11}x+a_{12}y,\ \dot{y}=a_{21}x+a_{22}y. \tag{10}$$

Существует неособое линейное преобразование [16, с. 162]

$$U=s_{11}x+s_{12}y,\ V=s_{21}x+s_{22}y,$$

сводящее эту систему к системе $\dot{U}=\lambda_1 U$, $\dot{V}=\lambda_2 V$, уравнение траекторий которой имеет вид $V=cU^{\lambda_1/\lambda_2}$. Сами траектории не являются алгебраическими. Поэтому траектории системы (10), получаемые с помощью линейного преобразования из только что рассмотренных, также не могут быть алгебраическими. △

Теорема 5. Если все траектории системы

$$\dot{x}=P_0+P_1+\ldots+P_n,\ \dot{y}=Q_0+Q_1+\ldots+Q_n \tag{11}$$

— алгебраические порядка не выше m, то все траектории системы $\dot{x}=P_n$, $\dot{y}=Q_n$ также алгебраические порядка не выше m.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4 и дано в [35].

Примечание. Можно доказать, что если голоморфная система имеет только алгебраические траектории, то «почти все» эти траектории имеют один и тот же порядок. Траектории, имеющие порядок, отличный от указанного, могут заполнять только множество нулевой плоской меры. Порядок каждой такой траектории меньше порядка «большинства» траекторий. Если некоторая голо-морфная система имеет трансцендентную траекторию, то «почти все» ее траектории трансцендентны.

Теорема 6. Если r неприводимых алгебраических кривых, порядки которых $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_r \stackrel{\triangle}{=} m$, состоят из целых траекторий системы (11) и

$$\sum_{i=1}^{r} m_i > \frac{m}{24}(m+1)(m+2)\left[8+3(m+3)(n-1)\right],$$

то все траектории системы (11) — алгебраические порядка не выше m.

$\triangle$ Пусть

$$W_{11} \stackrel{\triangle}{=} |1, x, y, x^2, \ldots, y^m|_{11}$$

есть соответствующий вронскиан, вычисленный в силу системы (11). Из теоремы 3 следует, что для доказательства теоремы 6 достаточно показать, что $W_{11} \equiv 0$.

Функция W_{11} представляет собой многочлен. Подсчитаем наивысшую степень этого многочлена. Используя метод доказательства соотношения (8), покажем, что члены со старшими степенями в W_{11} составляют однородный многочлен

$$W_4 \stackrel{\triangle}{=} |1, x, y, x^2, \ldots, y^m|_4,$$

равный указанному вронскиану, вычисленному в силу системы (4). Степень N такого многочлена (см. лемму на стр. 36) вычисляется по формуле (5).

Пусть теперь $R_i = 0$ есть уравнение одной из данных по условию инвариантных кривых, а R_i — соответствующий ей неприводимый многочлен.

Так как данные кривые состоят из целых траекторий, то на каждой из этих кривых многочлен W_{11} обязан обращаться в нуль (см. примечание 3 к теореме 1 § 4). Но тогда многочлен W_{11} должен делиться на каждый из неприводимых многочленов R_i [29]. Это может быть только в двух случаях: либо когда $W_{11} \equiv 0$, либо когда степень N многочлена W_{11} удовлетворяет неравенству $\sum_{i=1}^{r} m_i \leqslant N$. Последнее неравенство противоречит условию теоремы. Поэтому $W_{11} \equiv 0$, а ссылка на теорему 2 завершит доказательство. $\triangle$

Можно ли для многомерных систем получить результаты, аналогичные соответствующим результатам для двумерных систем с алгебраическими траекториями? Существует два вида аналогий (см. нижеследующие пункты 1 и 2). Чтобы ознакомиться с ними, рассмотрим трехмерную автономную голоморфную систему

$$\dot{x}=P(x, y, z),\ \dot{y}=Q(x, y, z),\ \dot{z}=R(x, y, z),\quad (x, y, z)\in D. \tag{12}$$

1. Двумерную поверхность $S\subset D$ будем называть инвариантной для системы (12), если любая траектория этой системы, имеющая общую точку с S, целиком лежит на S, и алгебраической, если ее можно задать с помощью уравнения вида $f(x, y, z)=0$, где f — многочлен относительно x, y и z. (Легко заметить, что все теоремы этого параграфа будут верны для системы (12), если в них под словом «траектория» понимать инвариантную (интегральную) поверхность.)

2. Кривую K трехмерного пространства (x, y, z) назовем алгебраической, если ее можно задать с помощью уравнений вида

$$f(x, y, z)=0,\ g(x, y, z)=0, \tag{13}$$

где f и g — многочлены.

Траекторию системы (12) будем называть алгебраической, если она является частью некоторой алгебраической кривой или совпадает с ней.

Теорема 7. Для того чтобы все траектории системы (12) с голоморфной правой частью были алгебраическими, необходимо и достаточно выполнение следующих тождеств:

$$|1, x, y, x^2, xy, y^2, \ldots, y^m| \overset{x,\,y,\,z}{\equiv} 0,$$

$$|1, x, z, x^2, xz, z^2, \ldots, z^m| \overset{x,\,y,\,z}{\equiv} 0,$$

где m — некоторое натуральное число.

Необходимость. Пусть все траектории системы (12) алгебраические. Тогда любое решение $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ системы (12) удовлетворяет соотношениям вида

$$f(x(t), y(t), z(t)) \overset{t}{\equiv} g(x(t), y(t), z(t)) \overset{t}{\equiv} 0,$$

где f и g — некоторые многочлены относительно x, y, z. ~~не зависящие от данного решения.~~ Используя понятие результанта [30, с. 127], исключим z из равенств (13).

Пусть $S(x, y)$ — соответствующий результант. Тогда

$$S(x(t),\ y(t)) \stackrel{t}{\equiv} 0. \tag{14}$$

Таким образом, доказано, что для любого решения $x(t), y(t), z(t)$ системы (12) существует многочлен $S(x, y)$, для которого верно соотношение (14). Поэтому всякое решение системы (12) является φ-решением, если в качестве последовательности (φ) взять последовательность функций $1, x, y, x^2, xy, \ldots$. Применяя теоремы 1 и 2 из § 4, придем к следующему заключению: существует такое число m_1, что при всех $m \geqslant m_1$ выполняется тождество

$$|1, x, y, x^2, xy, y^2, \ldots, y^m| \equiv 0.$$

Аналогично доказывается существование числа m_2 со свойством

$$|1, x, z, x^2, xz, z^2, \ldots, z^m| \equiv 0,\ \forall m \geqslant m_2.$$

Если теперь взять $m \stackrel{\triangle}{=} \max\{m_1, m_2\}$, то необходимость будет доказана.

Достаточность следует из теоремы 1 из § 4. △

Примечание. Из теоремы 7 следует, что в рассматриваемом многомерном случае справедливы теоремы, аналогичные теоремам 4 и 5 об алгебраических траекториях укороченных систем.

Глава II. ВЛОЖИМЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Пространство квазимногочленов и уравнение Вронского

14

Простейшим квазимногочленом, или квазиполиномом, называется комплекснозначная функция переменного t вида $t^k e^{\nu t}$, где $k \in \mathbf{N}_0$, $\nu \in \mathbf{C}$. Всякая линейная комбинация простейших квазимногочленов с комплексными коэффициентами называется квазимногочленом [31, с. 62]. В частности, нулевая функция $\theta : t \to 0$ также является квазимногочленом. Квазимногочлен, все значения которого действительны, называется действительным квазимногочленом. Функция $t \to \sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ является, например, действительным квазимногочленом. Множество всех квазимногочленов образует линейное пространство над полем комплексных чисел **C**, так как любая линейная комбинация любых двух квазимногочленов также представляет собой квазимногочлен. По аналогичной причине множество всех действительных квазимногочленов является линейным пространством над полем действительных чисел **R**. Если $p(t)$ и $q(t)$ — квазимногочлены, то функции $p(t)q(t)$, $dp(t)/dt$ и $\int_0^t p(\tau)d\tau$, очевидно, также квазимногочлены.

Пусть $p_n(t) \stackrel{\triangle}{=} t^n e^{\nu t}$ — простейший квазимногочлен с фиксированным ν. Для его производных справедливы следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
p_n^{(0)} \stackrel{\triangle}{=} p_n, \quad p_n' = \nu p_n + n p_{n-1}, \\
p_n'' = \nu^2 p_n + 2n\nu p_{n-1} + n(n-1) p_{n-2}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
p_n^{(n)} = \nu^n p_n + \ldots + n!\, p_0, \\
p_n^{(n+1)} = \nu^{n+1} p_n + \ldots + \nu n!\, p_0.
\end{gathered} \tag{1}$$

Из первых $n+1$ равенств в равенствах (1) можно единственным образом выразить p_i, $i=\overline{0;n}$, через $p_n^{(i)}$, $i=\overline{0;n}$. Поэтому квазимногочлен $p_n^{(n+1)}$ выражается линейно и единственным образом через квазимногочлены $p_n, p_n', \ldots, p_n^{(n)}$. Значит, всякий простейший квазимногочлен является решением некоторого линейного однородного стационарного уравнения порядка $n+1$. Более того, не существует линейного однородного стационарного уравнения порядка ниже $n+1$, которому удовлетворял бы квазимногочлен p_n (предположение противного противоречит соотношениям (1)). Так как всякий квазимногочлен представляет собой линейную комбинацию простейших квазимногочленов, то любой квазимногочлен является решением некоторого линейного однородного уравнения.

Для квазимногочлена $p(t)$ построим множество всех линейных однородных дифференциальных уравнений с комплексными постоянными коэффициентами. Для каждого из таких уравнений квазимногочлен $p(t)$ является решением. В этом множестве есть уравнение наименьшего порядка $N(p(t))$, который назовем порядком квазимногочлена $p(t)$. Порядок нулевого квазимногочлена $\theta : t \to 0$ по определению считаем равным единице. Для порядков любых квазимногочленов $p(t)$ и $q(t)$ имеют место следующие соотношения:

$$N[t^n e^{\nu t}]=n+1;\ N[\alpha p(t)]=N[p(t)];$$
$$N[p(t)+q(t)]\leqslant N[p(t)]+N[q(t)];$$
$$N[p(t)]-1\leqslant N\left[\frac{dp(t)}{dt}\right]\leqslant N[p(t)],\ n\in\mathbf{N};\ \nu\in\mathbf{C};$$
$$\alpha\in\mathbf{C},\ \alpha\neq 0.$$

Уравнением Вронского назовем дифференциальное уравнение

$$\begin{vmatrix} x & \dot{x} & \dots & x^{(m)} \\ \dot{x} & \ddot{x} & \dots & x^{(m+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{(m)} & x^{(m+1)} & \dots & x^{(2m)} \end{vmatrix}=0, \tag{2}$$

которое будем записывать в виде

$$|\,x,\ \dot{x},\dots,x^{(m)}\,|=0.$$

Лемма. Пусть $x(t)$, $t\in I$, — решение уравнения (2). Тогда если при некотором $t_0\in I$ определитель $|x,\dot{x},\dots,x^{(m-1)}|(t_0)\neq 0$, то $|x,\dot{x},\dots,x^{(m-1)}|(t)\neq 0$ и при всех $t\in I$.

$\triangle$ Пусть $W(t)\triangleq|x,\dot{x},\dots,x^{(m-1)}|(t)$ и $W(t_0)\neq 0$. Так как $W(t)$ — непрерывная функция на I, то существует интервал $]\alpha,\beta[\subset I$, на котором $W(t)$ не обращается в нуль. Предположим, что вопреки утверждению леммы $W(\alpha)=W(\beta)=0$ и α — внутренняя точка интервала I. Согласно теореме 2 (§ 1 гл. I) функции $x(t),\dots,x^{(m)}(t)$ линейно зависимы на $]\alpha,\beta[$ и, более того, удовлетворяют на $]\alpha,\beta[$ линейному стационарному уравнению

$$\begin{vmatrix} y & \dot{y} & \dots & y^{(m)} \\ x_0^{(0)} & x_0^{(1)} & \dots & x_0^{(m)} \\ x_0^{(1)} & x_0^{(2)} & \dots & x_0^{(m+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^{(m-1)} & x_0^{(m)} & \dots & x_0^{(2m-1)} \end{vmatrix}=0, \tag{3}$$

где $x_0^{(s)}\triangleq x^{(s)}(t_0)$, $s=\overline{0;\ (2m-1)}$. Другими словами, если $y(t)$, $t\in\mathbf{R}$, есть соответствующее решение уравнения (3), то $x(t)=y(t)$ при всех $t\in]\alpha,\beta[$. Так как функции $x(t)$ и $y(t)$ заданы и непрерывны на $I\supset]\alpha,\beta[$, то $x(\alpha)=y(\alpha)$. Поэтому функции $x(t)$ и $y(t)$ и их производные совпадают, по крайней мере, на полуоткрытом промежутке $[\alpha,\beta[$ и

$$|y,\dot{y},\dots,y^{(m-1)}|(t)\equiv W(t),\ t\in[\alpha,\beta[.$$

Из этого тождества, учитывая неравенство $W(t_0)\neq 0$, получим неравенство $|y,\dot{y},\dots,y^{(m-1)}|(t_0)\neq 0$. Наряду с функцией $y(t)$ ее производные $y^{(i)}(t)$ являются решениями уравнения (3). Вронскиан $|y,\dot{y},\dots,y^{(m-1)}|(t)$ этих решений, будучи отличным от нуля в точке t_0, будет отличным от нуля и при всех $t\in\mathbf{R}$ (см. леммы 2 и 3 из § 1 гл. I). Поэтому

$$W(\alpha)=|y,\dot{y},\dots,y^{(m-1)}|(\alpha)\neq 0,$$

а это противоречит нашему предположению о выполнимости равенства $W(\alpha)=0$. Таким образом, точка α может быть только левой граничной точкой интервала I.

Точно так же докажем, что β не может быть внутренней точкой интервала I и, значит, $]\alpha,\beta[=I$. $\triangle$

Теорема. Всякое решение уравнения (2) представляет собой квазимногочлен, определенный на всей числовой оси. Если известны начальные данные $x^{(i)}(t_0)=x_0^{(i)}$ $i=\overline{0;\ 2m-1}$, решения $x(t)$, то это решение можно найти по следующей схеме.

1. Составим последовательность чисел

$$W_{m-1}(t_0)\triangleq|x,\dot{x},\dots,x^{(m-1)}|(t_0),\ W_{m-2}(t_0)\triangleq$$
$$\triangleq|x,\dot{x},\dots,x^{(m-2)}|(t_0),\dots,W_1(t_0)\triangleq|x,\dot{x}|(t_0),\ W_0(t_0)\triangleq$$
$$\triangleq x(t_0).$$

2. Пусть в этой последовательности числа $W_{m-1}(t_0),\dots,W_r(t_0)$ равны нулю, а $W_{r-1}(t_0)\neq 0$. Составим линейное стационарное уравнение

$$\begin{vmatrix} y & \dot{y} & \dots & y^{(r)} \\ x_0^{(0)} & x_0^{(1)} & \dots & x_0^{(r)} \\ x_0^{(1)} & x_0^{(2)} & \dots & x_0^{(r+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^{(r-1)} & x_0^{(r)} & \dots & x_0^{(2r-1)} \end{vmatrix}=0. \tag{4}$$

3. Находим решение $y(t)$ уравнения (4) с начальными данными $y^{(i)}(t_0)=x_0^{(i)}$, $i=\overline{0;\ (r-1)}$. Функция $y(t)$ обязательно является решением уравнения (2), но она может не удовлетворять начальным условиям $y^{(i)}(t_0)=x_0^{(i)}$ для $i=\overline{r;\ (2m-1)}$.

4. Проверяем начальные условия $y^{(i)}(t_0)=x_0^{(i)}$ для $i=r,\ r+1,\dots,2m-1$. Если функция $y(t)$ удовлетворяет

этим условиям, то она является искомым решением, если не удовлетворяет — решения уравнения (2) с данными начальными условиями не существует.

$\triangle$ Доказательство проведем методом индукции. Пусть вначале $r=m$ и, значит, $x(t), t\in I,$ есть продолженное решение уравнения (2), для которого $W_{m-1}(t_0)\neq 0$. Тогда согласно лемме $W_{m-1}(t)\neq 0$ при всех $t\in I$. Поэтому на основании теоремы 1 (§ 1 гл. I) всюду на I решение $x(t)$ совпадает с решением $y(t)$ линейного стационарного уравнения (3), получаемого из уравнения (4) при $r=m$. При этом для начальных данных решения $y(t)$ справедливы соотношения $y^{(i)}(t_0)=x^{(i)}(t_0)$, $i=\overline{0;\ m-1}$. Покажем теперь, что интервалы определения $x(t)$ и $y(t)$ совпадают. Действительно, решение $y(t)$ линейного уравнения (4), как известно, определено на всем $\mathbf{R}$. Кроме того, функция $y(t)$ всюду на $\mathbf{R}$ удовлетворяет уравнению (2), ибо из линейной зависимости функций $y(t), \dot{y}(t), \ldots, y^{(m)}(t)$ следует тождество

$$|y, \dot{y}, \ldots, y^{(m)}|(t)\equiv 0,\ t\in\mathbf{R}.$$

Поэтому $x(t)=y(t)$ при всех $t\in\mathbf{R}$ и при $r=m$ теорема доказана.

Пусть теперь $r=m-1$ и, значит, $x(t), t\in I,$ есть такое решение уравнения (2), для которого $W_{m-1}(t_0)=0$, а $W_{m-2}(t_0)\neq 0$. Тогда из леммы следует тождество $W_{m-1}(t)\equiv 0$, $t\in I$, указывающее на то, что $x(t)$ — решение уравнения $|x, \dot{x}, \ldots, x^{(m-1)}|=0$, аналогичного уравнению (2). Так как, кроме того, $W_{m-2}(t_0)\neq 0$, то мы имеем дело с рассмотренным случаем с той лишь разницей, что здесь роль m и r играет $m-1$. Поэтому решение $x(t)$ уравнения (2) (если оно существует) будет одновременно и решением уравнения (4) с $r=m-1$, а теорема будет доказана и в этом случае.

Если, наконец, $r=1$, то, как следует из предыдущего, искомое решение $x(t), t\in I,$ уравнения (2) обязано быть также и решением уравнения $|x, \dot{x}|=0$ с общим решением $x=x_0\exp\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0}t\right)$ и $x\equiv 0$, откуда и следует утверждение теоремы. $\triangle$

Следствие. Начальная задача Коши для уравнения Вронского не может иметь более одного решения.

Доказательство очевидно.

Пример. Решая уравнение $|x, \dot{x}, \ddot{x}| = 0$ по предложенной схеме, легко убедиться в том, что для рассматриваемого уравнения задача Коши:

а) $x(0) = \dot{x}(0) = 1$, $\ddot{x}(0) = 2$, $\dddot{x}(0) = 0$ имеет одно решение;

б) $x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = \dddot{x}(0) = 1$ имеет одно решение;

в) $x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 1$, $\dddot{x}(0) = 0$ не имеет решений.

Примечание. Метод решения уравнения Вронского был опубликован автором в 1968 г. [32]. Работа Л. Эггана и А. Инзеля [33] об этом уравнении появилась в 1973 г.

§ 2. Определение вложимой системы. Условия вложимости

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = X(t, x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^T, \quad (t, x) \in D. \tag{1}$$

Будем называть i-ю компоненту x_i системы (1) вложимой, если для любого решения $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in I$, этой системы функция $x_i(t)$, $t \in I$, является квазимногочленом (здесь и далее сужение квазимногочлена на любой промежуток будем также называть квазимногочленом). Таким образом, i-я компонента системы (1) вложима тогда и только тогда, когда для каждого решения $x(t)$ этой системы существует линейное стационарное уравнение вида

$$a_0 z + a_1 \dot{z} + \ldots + a_m z^{(m)} = 0, \tag{2}$$

для которого $x_i(t)$ является решением.

Вообще говоря, порядок и коэффициенты уравнения (2) зависят от выбора решения $x(t)$. В частном случае, когда компонента $x_i(t)$ любого решения $x(t)$ системы (1) является одновременно и решением некоторого, общего для всех решений $x(t)$ уравнения (2), компоненту x_i системы (1) будем называть сильно вложимой в уравнение (2).

Пример 1. У системы $\dot{x} = xy$, $\dot{y} = a - y^2$ (a — постоянная) компонента x сильно вложима в уравнение $\ddot{x} = ax$.

Пример 2. У системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x \frac{y^2 - a}{x^2 + b}$$

(a, b — постоянные) вложимы (не сильно) обе компоненты. При этом

$$x=c_1e^{\sqrt{c}t}+c_2e^{-\sqrt{c}t}, \quad y=\sqrt{c}\,[c_1e^{\sqrt{c}t}-c_2e^{-\sqrt{c}t}],$$

где постоянные c, c_1, c_2 связаны соотношением $-4c_1c_2c=$ $=a+bc$. При отрицательных значениях c в общем решении следует пользоваться формулами Эйлера. Если $a>0$, то к выписанным решениям следует также присоединить решения вида $x=\pm\sqrt{a}t+c_1$, $y=\pm\sqrt{a}$.

Пример 3. У системы

$$\dot{x}=bx+ax^2+mxy,$$

$$\dot{y}=c+\frac{a}{m}(d-b)x+dy-\frac{2a^2}{m}x^2-3axy-my^2$$

первая компонента x сильно вложима в уравнение 2-го порядка

$$\ddot{x}=(d+2b)\dot{x}+(mc-b^2-bd)x.$$

Пример 4. У системы

$$\dot{x}=\varphi(xy), \quad x\dot{y}=1-y\varphi(xy),$$

где $\varphi(z)$ — некоторый квазимногочлен, компонента x сильно вложима.

Пусть i-я компонента системы (1) вложима. Тогда для каждого решения $x(t)=(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ функция $x_i(t)$ — квазимногочлен. Пусть $N(x_i(t))$ — его порядок.

Число r_i (или символ ∞), определяемое формулой

$$r_i \triangleq \sup_{\{x(t)\}} N(x_i(t)),$$

назовем порядком вложимости i-й компоненты x_i системы (1), а саму компоненту x_i будем называть r_i-вложимой.

Предположим, что порядок вложимости r_i компоненты x_i системы (1) конечен, а вектор-функция $X(t, x)$ непрерывно $2m$ раз дифференцируема в области D. Построим множество функций:

$$X_i^{(0)}(t, x) \triangleq x_i; \quad X_i^{(1)}(t, x) \triangleq X_i(t, x); \ldots;$$

$$X_i^{(k+1)} \triangleq \frac{\partial X_i^{(k)}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial X_i^{(k)}}{\partial x_j}X_j, \quad k=\overline{1; 2m-1}.$$

Отметим, что для любого решения $x(t)=(x_1(t),\ldots,\ldots,x_n(t))$ имеют место равенства:

$$X_i^{(k)}(t,x(t))\equiv\frac{d^kx_i(t)}{dt^k},\quad k=0,1,2,\ldots,2m-1.$$

Теорема 1. Пусть правая часть системы (1) дифференцируема $2r$ раз в области D. Тогда для r-вложимости компоненты x_i системы (1) необходимо и достаточно выполнение тождества

$$\begin{vmatrix} X_i^{(0)} & \ldots & X_i^{(r)} \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ X_i^{(r)} & \ldots & X_i^{(2r)} \end{vmatrix}(t,x)\equiv 0,\quad (t,x)\in D \qquad (3)$$

(t и x — независимые переменные).

Необходимость. Из r-вложимости компоненты x_i следует, что для любого решения $x(t)$, $t\in I$, системы (1) функции

$$X_i^{(k)}\ (t,x(t))\equiv\frac{d^kx_i(t)}{dt^k},\quad k=\overline{0;r},$$

линейно зависимы на I. Поэтому вронскиан

$$|x_i,\dot{x}_i,\ldots,x_i^{(r)}|(t)\overset{t}{\equiv}\begin{vmatrix} X_i^{(0)} & \ldots & X_i^{(r)} \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ X_i^{(r)} & \ldots & X_i^{(2r)} \end{vmatrix}(t,x(t))$$

обращается в нуль на любом решении $x(t)$ системы (1), откуда и следует выполнимость условия (3).

Достаточность. Пусть теперь выполнено условие (3). Тогда для любого решения $x(t)$, $t\in I$, системы (1) вронскиан

$$|x_i,\dot{x}_i,\ldots,x_i^{(r)}|(t)$$

обращается в нуль при всех $t\in I$. Поэтому на основании теоремы из § 1 $x_i(t)$ — квазимногочлен порядка не выше r, а компонента x_i системы (1) r-вложима.

Примечание. Если компонента x_i системы (1) r-вложима, то, как следует из теоремы 1, для любого решения $x(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))$, $x(t_0)=x_0$, этой системы функция $x_i(t)$ является решением уравнения Вронского $|x_i,\dot{x}_i,\ldots,x_i^{(r)}|=0$. Поэтому $x_i(t)$ может быть найдено по схеме, предложенной в § 1.

Систему (1) назовем вложимой, если любая компонента этой системы вложима. Число (символ ∞)

$r \triangleq \max\{r_i\}$, где r_i означает порядок вложимости компоненты x_i, назовем порядком вложимости системы (1), а вложимую систему (1) — r-вложимой. Как показывает пример системы

$$\dot{x}=x,\ \dot{y}=x+x^2+\ldots+x^r,$$

порядок вложимости не зависит от порядка самой системы и может быть как угодно высок.

Систему (1) назовем сильно вложимой, если любая компонента этой системы сильно вложима. Из этого определения следует, что система (1) сильно вложима тогда и только тогда, когда множество ее решений является подмножеством множества решений некоторой линейной стационарной системы.

По своим качественным свойствам вложимые системы оказываются более сложными, чем линейные стационарные системы. Вложимые системы могут иметь несколько изолированных особых точек, предельные циклы, особые точки сложной структуры. Приведем здесь несколько примеров, иллюстрирующих сказанное.

Пример 5. Вложимая система

$$\dot{x}=\frac{2axy}{x^2+y^2+b},\ \dot{y}=a-\frac{2ax^2}{x^2+y^2+b}\quad (b>0 \text{ и } a \text{ — постоянные})$$

с общим решением

$$x=\frac{a}{c}+c_1\sin ct+c_2\cos ct;\ y=c_1\cos ct-c_2\sin ct,\ \text{ если } c\neq 0;$$

$$x=0,\ y=at+c_1,\ \text{ если } c=0,$$

где постоянные c, c_1, c_2 связаны соотношением $c^2(b+c_1^2+c_2^2)=a^2$, имеет два центра в точках $(-\sqrt{b}, 0)$ и $(\sqrt{b}, 0)$ (рис. 3).

Пример 6. Вложимая система

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=1-x\,\frac{1+2x-y^2}{1+x^2}$$

с первым интегралом $\dfrac{1+2x-y^2}{1+x^2}=c$ и общим решением

$$x=\begin{cases}\dfrac{1}{c}+c_1\sin\sqrt{c}\,t+c_2\cos\sqrt{c}\,t, & \text{если } c\neq 0,\\ \dfrac{(t-c_1)^2+1}{2}, & \text{если } c=0,\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}\sqrt{c}(c_1\cos\sqrt{c}\,t-c_2\sin\sqrt{c}t, & \text{если } c\neq 0,\\ t-c_1, & \text{если } c=0,\end{cases}$$

где $c^2[1+c_1{}^2+c_2{}^2]=c+1$, имеет две особые точки: седло в точке $(-\frac{1+\sqrt{5}}{2},0)$ и центр в точке $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},0)$ (рис. 4).

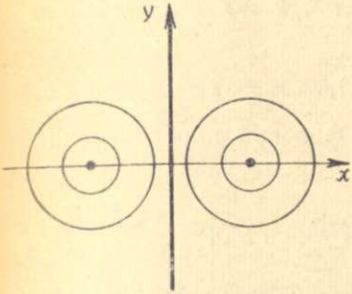

Рис. 3.

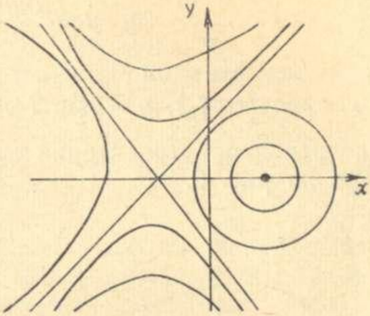

Рис. 4.

Пример 7. Сильно вложимая система

$$\dot{x}=x-y-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \dot{y}=x+y-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

с общим решением

$$\left.\begin{aligned}x&=(1+ce^{t-t_0})\cos(t-t_0)\\ y&=(1+ce^{t-t_0})\sin(t-t_0)\end{aligned}\right\},\ \text{где } 1+ce^{t-t_0}\geqslant 0,$$

имеет неустойчивый предельный цикл $x^2+y^2=1$.

Пример 8. Сильно вложимая система

$$\dot{x}=-y+x\frac{|\rho-1|}{\rho},\ \dot{y}=x+y\frac{|\rho-1|}{\rho},\ \rho\overset{\triangle}{=}\sqrt{x^2+y^2},$$

имеет полуустойчивый предельный цикл $\rho=1$. Общее решение этой системы можно записать в виде

$$x=\rho\cos(t-t_0),\ y=\rho\sin(t-t_0),$$

$$\rho=\frac{c+|c|}{2}e^{t-t_0}+\frac{c-|c|}{2}e^{-(t-t_0)}\geqslant 0.$$

Пример 9. Сильно вложимая система

$$\dot{x}=y+\sqrt{x^2+y^2},\ \dot{y}=-x+\sqrt{x^2+y^2}$$

с общим решением

$$x=c_1\sqrt{c_2}+c_2e^t,\ y=-c_1\sqrt{c_2}-0{,}5c_1{}^2e^{-t},$$

где $c_2e^t+0{,}5\,c_1{}^2e^{-t}+c_1\sqrt{c_2}\geqslant 0$, имеет единственную особую точку $(0, 0)$. Распределение кривых на фазовой плоскости показано на рис. 5.

Пример 10. Решением сильно вложимой системы

$$\dot{x}=\frac{4x^2y}{\rho^3}-y,\ \dot{y}=\frac{4xy^2}{\rho^3}+x,\ \rho\triangleq\sqrt{x^2+y^2},$$

являются функции

$$x=\rho\cos(t-t_0),\ y=\rho\sin(t-t_0),\ \rho=\cos 2(t-t_0)+c\geqslant 0.$$

Распределение траекторий на фазовой плоскости показано на рис. 6.

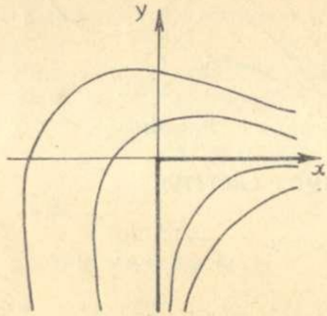

Рис. 5.

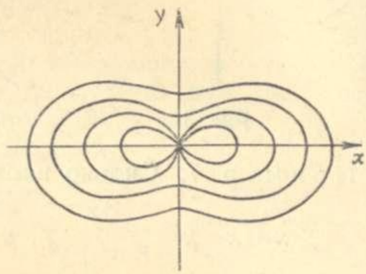

Рис. 6.

Пример 11. Вложимая система из примера 2 при $a>0$ в точке $(0, 0)$ имеет центр. При этом область центра не совпадает со всей плоскостью, а представляет собой открытую полосу $y^2<a$.

Множество сильно вложимых систем является собственной частью множества вложимых систем и содержит в качестве своего собственного подмножества множество линейных стационарных систем. Действительно, вложимая система $\dot{x}=x^2y,\ \dot{y}=-xy^2$ не является сильно вложимой, а сильно вложимое уравнение $\dot{x}=\sqrt{x^2+1}$ — линейным.

Непосредственным следствием теоремы 1 является следующая

Теорема 2. Пусть правая часть системы (1) дифференцируема $2r$ раз в области D. Тогда для r-вложимости системы (1) необходимо и достаточно выполнение тождеств

$$\begin{vmatrix} X_i^{(0)} & \ldots & X_i^{(r)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_i^{(r)} & \ldots & X_i^{(2r)} \end{vmatrix} (t, x) \equiv 0, \quad (t, x) \in D, \quad i = \overline{1; n}.$$

Следующая теорема утверждает, что из вложимости голоморфной системы вытекает ее конечная r-вложимость. Более того, если для каждого решения $x(t)$ компонента $x_i(t)$ является квазимногочленом, то существует такое натуральное число m, которое равномерно ограничивает множество порядков этих квазимногочленов сверху, т. е. $N(x_i(t)) \leqslant m$ для всякого решения системы (1).

Теорема 3. Пусть правая часть $X(t, x)$ системы (1) голоморфна в области D. Тогда для вложимости i-й компоненты системы (1) необходимо и достаточно существование натурального числа r, для которого выполнено условие (3).

Необходимость. Пусть компонента x_i вложима. Наряду с системой (1) рассмотрим последовательность функций

$$X_i^{(0)}(t, x) \triangleq x_i, \quad X_i^{(k+1)} \triangleq \frac{\partial X_i^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial X_i^{(k)}}{\partial x} X, \quad k = \overline{1; \infty}. \qquad (4)$$

Как известно, для любого решения $x(t)$ системы (1)

$$X_i^{(k)}(t, x(t)) \equiv \frac{d^k x_i(t)}{dt^k}.$$

Кроме того, из вложимости компоненты x_i следует, что для любого решения $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ системы (1) функция $x_i(t)$ является квазимногочленом и, значит, решением некоторого линейного стационарного уравнения, т. е. для некоторых постоянных a_k будут выполнены тождества

$$a_0 X_i^{(0)}(t, x(t)) + a_1 X_i^{(1)}(t, x(t)) + \ldots + a_r X_i^{(r)}(t, x(t)) \equiv$$
$$\equiv a_0 x_i(t) + a_1 \dot{x}_i(t) + \ldots + a_r x_i^{(r)}(t) \equiv 0.$$

Поэтому каждое решение системы (1) является φ-решением по отношению к последовательности (4). Ссылка на следствие к теореме 2 (§ 4 гл. I) завершает доказательство необходимости.

Достаточность сразу следует из указанного следствия.

Применяя доказанную теорему к каждой компоненте, получим необходимое и достаточное условие вложимости системы с голоморфной правой частью.

Вложимые системы тесным образом связаны с матрицами Ганкеля [34, с. 301]. Наряду с системой (1) рассмотрим бесконечную ганкелеву матрицу

$$H_i(t,x) \triangleq \left| \begin{matrix} X_i^{(0)} & X_i^{(1)} & X_i^{(2)} & \ldots \\ X_i^{(1)} & X_i^{(2)} & X_i^{(3)} & \ldots \\ X_i^{(2)} & X_i^{(3)} & X_i^{(4)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right|.$$

Рангом функциональной матрицы $H_i(t,x)$ в области D назовем число $r_i \triangleq \sup \operatorname{rank} H_i(t,x)$. (Определение ранга числовой матрицы см. в [34].)

Из теоремы 3 следует

Теорема 4. Для вложимости компоненты x_i системы (1) с голоморфной в области D функцией X необходимо и достаточно, чтобы матрица $H_i(t,x)$ имела конечный ранг в области D.

Из теорем 4 и 8 из [34, с. 498] следует

Теорема 5. Для вложимости компоненты x_i системы (1) с голоморфной в области D правой частью необходимо и достаточно, чтобы функция

$$F_i(z,t,x) \triangleq X_i^{(0)} + \frac{X_i^{(1)}}{z} + \frac{X_i^{(2)}}{z^2} + \ldots$$

была рациональной относительно z.

Теорема 6. Пусть система

$$\dot{x} = y + P(x,y), \quad \dot{y} = -x + Q(x,y),$$

где P и Q — аналитические функции, разложения которых в окрестности особой точки (0, 0) не содержат свободных и линейных членов, вложима. Тогда особая точка (0, 0) для этой системы является особой точкой типа «центр».

△ Доказательство от противного. Допустим, что (0, 0) — не центр, а фокус. Тогда для любого решения $(x(t),$

$y(t))$, начинающегося в достаточно малой окрестности особой точки,

$$\lim x(t) = \lim y(t) = 0 \qquad (5)$$

либо при $t\to\infty$, либо при $t\to-\infty$. Для определенности положим, что указанные равенства верны при $t\to\infty$.

Так как система вложима, то

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) e^{\alpha_i t}, \quad y(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) e^{\alpha_i t}, \qquad (6)$$

где $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$ — постоянные, а $f_i(t)$ и $\varphi_i(t)$ — многочлены по t с почти периодическими коэффициентами. Учитывая равенства (5), заключаем, что все $\alpha_i < 0$. Подставляя (6) в рассматриваемую систему, после несложных выкладок получаем соотношения

$$\begin{aligned} f_n' + \alpha_n f_n - \varphi_n &\equiv e^{-\alpha_n t} P(x(t), y(t)) - \sum_{i=1}^{n-1} F_i(t) e^{(\alpha_i - \alpha_n)t}, \\ \varphi_n' + f_n + \alpha_n \varphi_n &\equiv e^{-\alpha_n t} Q(x(t), y(t)) - \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_i(t) e^{(\alpha_i - \alpha_n)t}, \end{aligned} \qquad (7)$$

где функции $F_i(t)$ и $\Phi_i(t)$ того же типа, что и функции $f_i(t)$ и $\varphi_i(t)$.

Из равенств (5) и свойств функций P и Q можно заключить, что при достаточно больших t для некоторой постоянной M выполнено неравенство

$$|P(x(t), y(t))| + |Q(x,(t), y(t))| < M[x^2(t) + y^2(t)].$$

Тогда для указанных t верно соотношение

$$e^{-\alpha_n t} [\,|P(x(t), y(t))| + |Q(x(t), y(t))|\,] <$$
$$< M[(\sum_{i=1}^{n} f_i \exp(\alpha_i - \frac{\alpha_n}{2})t)^2 + (\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \exp(\alpha_i - \frac{\alpha_n}{2})t)^2].$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $t\to\infty$ и учитывая, что $\alpha_i - \dfrac{\alpha_n}{2} < 0$, $i = 1, 2, \ldots$, получаем

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha_n t} P(x(t), y(t)) = \lim_{t\to\infty} e^{-\alpha_n t} Q(x(t), y(t)) = 0.$$

Тогда согласно (7)

$$\lim_{t\to\infty} [f'_n + \alpha_n f_n - \varphi_n] = \lim_{t\to\infty} [\varphi'_n + f_n + \alpha_n \varphi_n] = 0.$$

Так как функции $f_n(t)$ и $\varphi_n(t)$ — многочлены по t с почти периодическими коэффициентами, то полученное равенство может быть выполнено лишь при условии

$$f_n'+\alpha_n f_n-\varphi_n\equiv\varphi_n'+f_n+\alpha_n\varphi_n\equiv 0,$$

откуда

$$f_n(t)=e^{-\alpha_n t}[c_1\sin t+c_2\cos t],\ \varphi_n(t)=e^{-\alpha_n t}[c_1\cos t-c_2\sin t].$$

Это противоречит виду функций f_n и φ_n. Δ

Замечание. Линейные стационарные преобразования искомых функций и независимого переменного не меняют свойства вложимости. Поэтому доказанную теорему можно сформулировать в более общей форме: особая точка голоморфной вложимой системы является центром, если только особая точка системы линейного приближения — центр.

При изучении качественных свойств автономной системы

$$\dot{x}=f(x),\ x=(x_1,\ldots,x_n)\in D, \tag{8}$$

часто важно знать топографическую картину распределения траекторий в фазовом пространстве. Как известно, если $M(x)$, $M:D\to\mathbf{R}^+$, есть некоторая положительная функция, то траектории системы

$$\dot{x}=f(x)M(x) \tag{9}$$

совпадают с траекториями системы (8). Пусть для системы (8) возможно указать такую функцию $M(x)$, при которой система (9) оказывается вложимой. Тогда, изучив распределение траекторий системы (9), исследуем и распределение траекторий системы (8). В связи с этим уместны следующие определения.

Определение 1. Траекторию системы (8) назовем вложимой, если в параметрическом виде $x=p(\tau)$ ее можно задать с помощью квазимногочленов.

Определение 2. Скалярную функцию $M(x)$, $M:D\to\mathbf{R}^+$, для которой система (9) вложима, назовем множителем вложимости системы (8).

Не всякая система имеет вложимые траектории. Можно, однако, ожидать, что для любой системы существует система с вложимыми траекториями, «близкими» к траекториям исходной системы. Если для системы возможно указать множитель вложимости, то каждая траектория этой системы вложима. Задавшись порядком вложимости и воспользовавшись теоремой 2, для множителя вложимости системы (8) можно составить систему уравнений в частных производных. Теоретически из этой системы при $n \geqslant 2$ можно получить некоторые условия вложимости всех траекторий системы (8) и найти сам множитель вложимости, если он существует. Практически при большом порядке вложимости это невозможно сделать из-за громоздкости вычислений. Приведем пример системы с вложимыми траекториями.

Пример 12. Двумерная система

$$\dot{x} = xy, \; \dot{y} = y^2 + ax^2y + bx^4$$

(a, b — постоянные) при $x \neq 0$ имеет множитель вложимости $M = x^{-2}$. Соответствующая вложимая система имеет вид

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{y^2}{x^2} + ay + bx^2.$$

Поэтому

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = a\frac{dx}{d\tau} + bx, \; y = x\frac{dx}{d\tau}.$$

Из этих соотношений можно определить $x(\tau)$ и $y(\tau)$. В зависимости от корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения $\lambda^2 = a\lambda + b$ для первоначально заданной системы могут представиться следующие случаи распределения траекторий на фазовой плоскости: 1) корни действительные и разных знаков (рис. 7); 2) корни действительные одного знака (рис. 8); 3) хотя бы один корень равен нулю (рис. 9); 4) корни комплексные (рис. 10).

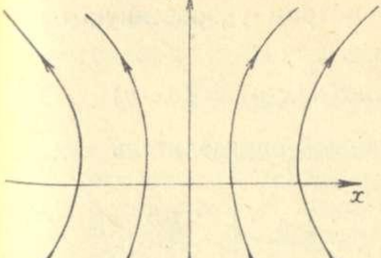

Рис. 7.

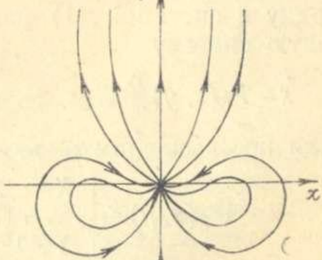

Рис. 8.

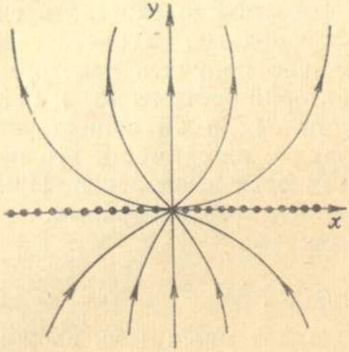

Рис. 9.

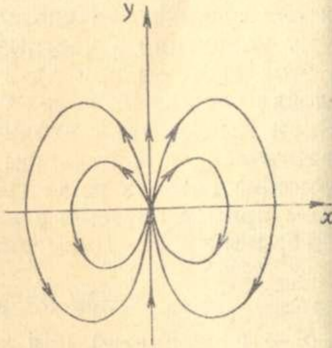

Рис. 10.

§ 3. Вложимость укороченных систем. Алгебраические траектории вложимых систем

Рассмотрим двумерную автономную систему с голоморфной в окрестности начала координат правой частью

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_k(x, y) + P_{k+1}(x, y) + \ldots \triangleq X(x, y), \\ \dot{y} &= Q_k(x, y) + Q_{k+1}(x, y) + \ldots \triangleq Y(x, y) \end{aligned} \tag{1}$$

($P_i(x, y)$ и $Q_i(x, y)$ — однородные многочлены степени «i»). Вычислим для этой системы определитель

$$W_1(x, y) \triangleq \left| \begin{matrix} X^{(0)} & \ldots & X^{(m)} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ X^{(m)} & \ldots & X^{(2m)} \end{matrix} \right|_1 (x, y).$$

Наряду с системой (1) рассмотрим укороченную однородную систему

$$\dot{x} = P_k(x, y) \triangleq X(x, y), \quad \dot{y} = Q_k(x, y) \triangleq Y(x, y) \tag{2}$$

и для нее вычислим аналогичный определитель

$$W_2(x, y) \triangleq \left| \begin{matrix} X^{(0)} & \ldots & X^{(m)} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ X^{(m)} & \ldots & X^{(2m)} \end{matrix} \right|_2 (x, y).$$

Лемма. Определитель $W_2(x, y)$ есть однородный многочлен степени $(m+1)(mk-m+1)$.

$\triangle$ Каждый элемент $X^{(i)}$ определителя $W_2(x, y)$ представляет собой, что нетрудно доказать методом индукции, однородный многочлен степени $i(k-1)+1=$ $=ik-(i-1)$.

На месте каждого элемента определителя W_2 запишем степень этого элемента. Получим таблицу

$$\left\|\begin{matrix} 1 & k & \ldots & m(k-1)+1 \\ k & 2k-1 & \ldots & (m+1)(k-1)+1 \\ 2k-1 & 3k-2 & \ldots & (m+2)(k-1)+1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ m(k-1)+1 & (m+1)(k-1)+1 & \ldots & 2m(k-1)+1 \end{matrix}\right\|,$$

откуда видно, что на пересечении i-го столбца с j-й строкой (если счет вести от нуля) в определителе W_2 стоит однородный многочлен $X^{(i+j)}$, степень которого согласно сказанному выше равна $(i+j)(k-1)+1$ (если он не обращается тождественно в нуль).

Раскроем определитель W_2. Получим сумму, в которой каждое слагаемое представляет собой произведение элементов $X^{(i+j)}$ определителя. В каждом слагаемом присутствуют члены по одному из каждого столбца и каждой строки. Степень такого слагаемого-произведения равна

$$\begin{gathered}\Sigma[\text{степень } X^{(i+j)}]=\Sigma[(i+j)(k-1)+1]= \\ =(k-1)[\Sigma i+\Sigma j]+\Sigma 1= \\ =(k-1)[(1+2+\ldots+m)+(1+2+\ldots+m)]+ \\ +(m+1)=(m+1)[m(k-1)+1],\end{gathered}$$

откуда и следует заключение леммы. △

Теорема 1. Пусть компонента x системы (1) m-вложима. Тогда компонента x укороченной системы (2) также m-вложима.

△ Нетрудно убедиться в том, что

$$W_1(x, y)\equiv W_2(x, y)+\Phi(x, y),$$

где $\Phi(x, y)$ — голоморфная функция, разложение которой в окрестности начала координат начинается с членов, степень которых выше степени однородного многочлена $W_2(x, y)$. Из $W_1(x, y)\equiv 0$ будет следовать тождество $W_2(x, y)\equiv 0$, выполнение которого согласно теореме 1 (§ 4 гл. I) достаточно для заключения доказываемой теоремы. △

Следствие. Для m-вложимости системы (1) необходима m-вложимость системы (2).

Доказательство очевидно.

Теорема 2. Пусть система

$$\dot{x}=P_k(x,y)+\ldots+P_s(x,y),$$
$$\dot{y}=Q_k(x,y)+\ldots+Q_s(x,y)$$

m-вложима. Тогда система (2) и наряду с ней система

$$\dot{x}=P_s(x,y),\ \dot{y}=Q_s(x,y)$$

также m-вложимы.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Заметим, что приведенные теоремы 1 и 2 переносятся на общий случай системы порядка n.

В связи с доказанными теоремами возникает вопрос: каким условиям должны удовлетворять правые части однородной вложимой системы? Некоторое представление о возможном ответе дает следующее

Предположение. Система

$$\dot{x}=P_n(x,y),\ \dot{y}=Q_n(x,y),$$

где P_n и Q_n — однородные полиномы степени n, вложима тогда и только тогда, когда ее с помощью некоторой линейной замены переменных можно преобразовать в одну из систем нижеуказанных видов:

$$\text{а)}\ \dot{x}=0,\ \dot{y}=ax^n+byx^{n-1};$$

$$\text{б)}\ \dot{x}=x^{m+1}y^m,\ \dot{y}=-x^my^{m+1},\ 2m+1=n;$$

$$\text{в)}\ \dot{x}=y(x^2+y^2)^m,\ \dot{y}=-x(x^2+y^2)^m,\ 2m+1=n.$$

Рассмотрим теперь двумерную систему

$$\dot{x}=P(x,y),\ \dot{y}=Q(x,y), \tag{3}$$

где P и Q — полиномы. Простейшим примером такой системы является линейная, а значит, сильно вложимая система. Как известно, линейная система может иметь среди своих траекторий и неалгебраические кривые. Тем не менее верна следующая

Теорема 3. Если у системы (3) с полиномиальной правой частью некоторая (хотя бы одна) компонента вложима, но не является сильно вложимой, то всякая траектория системы (3) представляет собой алгебраическую кривую или ее часть.

$\triangle$ Пусть у системы (3) вложима компонента x. Тогда для любого решения $(x(t),\ y(t))$ этой системы существуют числа $a_i \in \mathbf{R}$ и $m \in \mathbf{N}$, для которых верно тождество

$$a_0 x(t) + a_1 \dot{x}(t) + \ldots + a_m x^{(m)}(t) \overset{t}{\equiv} 0.$$

Вычислив $x^{(i)}(t)$ в силу системы (3), убедимся в том, что $x^{(i)}(t) = P_i(x(t),\ y(t))$, где $P_i(x, y)$ есть некоторый полином от x и y. Таким образом,

$$a_0 x(t) + a_1 P_1(x(t),\ y(t)) + \ldots + a_m P_m(x(t),\ y(t)) \overset{t}{\equiv} 0. \quad (4)$$

В связи с этим могут представиться два случая:

$$1)\ \sum_{i=0}^{m} a_i P_i(x, y) \not\equiv 0 \ \text{ и } \ 2)\ \sum_{i=0}^{m} a_i P_i(x, y) \overset{x,\,y}{\equiv} 0.$$

В первом случае в силу тождества (4) решение $(x(t),\ y(t))$ задает алгебраическую траекторию. Второго случая быть не может, так как в противном случае компонента x должна быть сильно вложимой. $\triangle$

З а м е ч а н и е. Пользуясь теоремой 2 из [35], а точнее доказательством этой теоремы, нетрудно показать, что система (3), удовлетворяющая условиям доказанной теоремы, обязана иметь ~~общий~~ интеграл вида $R(x, y) = c$, где $R(x, y)$ — дробно-рациональная функция x и y. В случае, когда P и Q не полиномы, такого заключения сделать нельзя, если даже все траектории системы (3) алгебраические. Примером этого может служить вложимая система первый

$$\dot{x} = y,\quad \dot{y} = [\sqrt{x^2 + 2y} - x]\, y$$

с интегралом $\sqrt{x^2 + 2y} - x = c$, все траектории которой представляют собой лучи.

С л е д с т в и е. Пусть у системы (3) с полиномиальной правой частью некоторая компонента вложима, но не является сильно вложимой. Тогда система (3) не может иметь особых точек типа «фокус».

Доказательство следует из того факта, что любая алгебраическая кривая может иметь только конечное число общих точек с прямой.

§ 4. Построение функций типа Ляпунова для сильно вложимых систем

В этом параграфе будет указан способ построения функций со знакопостоянной (знакоопределенной) производной вдоль решений вложимых систем. Как известно, такие функции играют большую роль при изучении вопросов устойчивости, диссипативности, конвергентности и т. п. [36; 37; 23; 38; 9].

Начнем с примера. Рассмотрим систему

$$\dot{x}=y(x^2+\alpha),\ \dot{y}=ay-2xy^2+\frac{bx}{x^2+\alpha},\ \alpha>0.$$

Для этой системы

$$\ddot{x}=\dot{y}(x^2+\alpha)+y\,2x\dot{x}=a\dot{x}+bx.$$

Поэтому компонента x сильно вложима в уравнение $\ddot{x}=a\dot{x}+bx$, эквивалентное линейной системе $\dot{x}=z$, $\dot{z}=az+bx$. Если реальные части корней уравнения $\lambda^2=a\lambda+b$ отличны от нуля, то для этой системы можно построить квадратичную форму

$$V(x, z)\triangleq a_{11}x^2+a_{12}xz+a_{22}z^2,$$

производная которой в силу рассматриваемой линейной системы $\dot{V}(x, z)=x^2+z^2$. Определим теперь функцию

$$U(x, y)\triangleq V(x, \dot{x})=a_{11}x^2+a_{12}x[y(x^2+\alpha)]+ +a_{22}[y(x^2+\alpha)]^2.$$

Производная этой функции вдоль решений первоначально данной системы будет вычисляться по формуле

$$\dot{U}(x, y)=x^2+[y(x^2+\alpha)]^2.$$

Функция $\dot{U}(x, y)$ будет положительно-определенной, как и квадратичная форма x^2+z^2.

В этом параграфе приведенные рассуждения обобщаются на произвольные системы с сильно вложимой компонентой.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}=X(t, x),\ x=(x_1, \ldots, x_n),\ (t, x)\in D. \tag{1}$$

Будем считать, что ее компонента x_1 сильно вложима в уравнение

$$x_1^{(r)}+a_{r-1}x_1^{(r-1)}+\ldots+a_1\dot{x}_1+a_0x_1=0, \tag{2}$$

а правая часть $X(t, x)$ есть r раз дифференцируемая вектор-функция. Определим функции $X_1^{(r)}(t, x)$ формулами

$$X_1^{(0)}(t, x) \triangleq x_1,\ X_1^{(i+1)} \triangleq \frac{\partial X_1^{(i)}}{\partial t} + \frac{\partial X_1^{(i)}}{\partial x} X,\ i=\overline{0;\ r-1}. \quad (3)$$

Для любого решения $x(t)=(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ системы (1) верны тождества

$$\frac{d^i x_1(t)}{dt^i} \equiv X_1^{(i)}(t, x(t)).$$

Поэтому из сильной вложимости компоненты x_1 в уравнение (2) будет следовать соотношение

$$X_1^{(r)}(t, x(t)) + a_{r-1} X_1^{(r-1)}(t, x(t)) + \ldots$$
$$\ldots + a_0 X_1^{(0)}(t, x(t)) \overset{t}{\equiv} 0,$$

из которого, учитывая произвольность выбора решения $x(t)$, получим тождество

$$X_1^{(r)}(t, x) + a_{r-1} X_1^{(r-1)}(t, x) + \ldots$$
$$\ldots + a_0 X_1^{(0)}(t, x) \overset{t,\ x}{\equiv} 0. \quad (4)$$

Предположим, что действительные части корней уравнения

$$\lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (5)$$

отрицательны. Тогда [36, с. 31] существует положительно-определенная квадратичная форма $V(x_1, \ldots, x_1^{(r-1)})$ независимых переменных $x_1, \ldots, x_1^{(r-1)}$, производная которой в силу уравнения (2) равна

$$\dot V = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot x_1 + \frac{\partial V}{\partial \dot x_1} x_1^{(2)} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_1^{(r-2)}} x_1^{(r-1)} +$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial x_1^{(r-1)}}\left[-a_{r-1} x_1^{(r-1)} - \ldots - a_1 \dot x_1 - a_0 x_1\right] =$$
$$= -\sum_{i=0}^{r-1} [x_1^{(i)}]^2.$$

Определим функцию $U(t, x)$ формулой

$$U(t, x) \triangleq V[X_1^{(0)}(t, x), X_1^{(1)}(t, x), \ldots, X_1^{(r-1)}(t, x)].$$

Производная этой функции в силу системы (1) с учетом тождества (4) вычисляется по формуле

$$\dot U(t,x)=\frac{\partial V}{\partial x_1}X_1{}^{(1)}+\ldots+\frac{\partial V}{\partial x_1{}^{(r-1)}}X_1{}^{(r)}=$$
$$=-\sum_{i=0}^{r-1}[X_1{}^{(i)}(t,x)]^2.$$

Таким образом, функции $U(t,x)$ и $\dot U(t,x)$ будут, по крайней мере, знакопостоянными и, значит, верно

Утверждение. Пусть компонента x_1 системы (1) с r раз дифференцируемой правой частью сильно вложима в уравнение (2), а все корни уравнения (5) имеют отрицательные действительные части. Тогда для системы (1) возможно указать функцию $U(t,x)$, представляющую собой знакоположительную квадратичную форму от функций (3), производная которой в силу системы (1) равна

$$\dot U(t,x)=-\sum_{i=0}^{r-1}[X_1{}^{(i)}(t,x)]^2.$$

Это утверждение позволяет в некоторых случаях строить направляющие функции [23, с. 85] для систем вида (1), изучать их диссипативность, устойчивость и т. п. В качестве примера рассмотрим двумерную систему

$$\dot x=y+R(t,x,y),\ \dot y=ax+[b-\varphi(x)]y+S(t,x,y) \quad (6)$$

с заданными и ограниченными на всем $\mathbf{R}^3$ функциями R, S, φ, $\int\limits_0^x\varphi(\tau)\,d\tau$ и постоянными $a<0$, $b<0$. Наряду с этой системой рассмотрим укороченную систему

$$\dot x=y+\Phi(x),\ \dot y=ax+[b-\varphi(x)][y+\Phi(x)],\ \Phi(x)\triangleq\int\limits_0^x\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Так как

$$\ddot x=\dot y+\Phi'(x)\dot x=ax+[b-\varphi(x)]\dot x+\varphi(x)\dot x=ax+b\dot x,$$

то компонента x рассматриваемой укороченной системы сильно вложима в уравнение

$$\ddot x=ax+b\dot x.$$

Так как корни уравнения $\lambda^2=a+b\lambda$ имеют отрицательные действительные части, то для укороченной системы можно указать функцию $U(t,x,y)$, представляющую собой положительно-определенную квадратичную форму от функций x и $y+\Phi(x)$ и, значит, положительно-определенную функцию, производная которой в силу указанной системы имеет вид

$$\dot{U}(t, x, y) = -x^2 - [y+\Phi(x)]^2.$$

Тогда производная от функции $U(t, x, y)$ в силу системы (6) будет иметь вид

$$\dot{U}(t, x, y) = -[x^2+(y+\Phi(x))^2]\,[1-\alpha(t, x, y)],$$

где

$$\alpha(t, x, y) \triangleq \frac{[R-\Phi]U'_x + [S-(b-\varphi)\Phi]U'_y}{x^2+(y+\Phi(x))^2} \to 0$$

при $x^2+y^2\to\infty$. Таким образом, система (6) оказывается диссипативной [9, с. 42]. Если к тому же функции R и S ω-периодичны по t, то система (6) обладает ω-периодическим решением [9, с. 32].

Другие примеры на применение доказанного утверждения можно найти в [39].

§ 5. Дифференциальные системы, эквивалентные по вложимости

Рассмотрим две системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x),\ t\in I,\ x\in D\subset \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

$$\dot{y} = g(t, y),\ t\in I,\ y\in G\subset \mathbf{R}^n \tag{2}$$

(I — интервал числовой оси, D и G — области). Всюду далее будем предполагать, что для рассматриваемых систем в указанных областях выполнены условия существования и единственности решений задачи Коши.

Пусть $x(\cdot, t_0, x_0)$ и $y(\cdot, t_0, y_0)$ — решения систем (1) и (2), проходящие при $t=t_0$ через точки x_0 и y_0 соответственно.

Определение. Системы (1) и (2) назовем эквивалентными по вложимости, если существует отображение $\varphi: I\times D\to G$, при каждом $t_0\in I$ удовлетворяющее условиям.

А. Отображение $\varphi(t_0, \cdot)$ взаимно однозначно отображает область D на G.

Б. Для любой точки $x_0 \in D$ можно указать линейную однородную стационарную систему

$$z^{(m)} + A_{m-1} z^{(m-1)} + \ldots + A_0 z = 0, \tag{3}$$
$$z \in \mathbf{R}^n, \ m = m(t_0, x_0), \ A_i = A_i(t_0, x_0),$$

одним из решений которой является функция

$$z(\cdot, t_0, x_0) \stackrel{\triangle}{=} y(\cdot, t_0, \varphi(t_0, x_0)) - x(\cdot, t_0, x_0).$$

Нетрудно увидеть, что указанное соотношение между системами действительно является соотношением эквивалентности.

Лемма. Если существует взаимно однозначное отображение $\varphi_* : D \to G$, при некотором фиксированном $t_0 = t_* \in I$ обладающее свойством Б, и все решения систем (1) и (2) продолжимы на весь интервал I, то системы (1) и (2) эквивалентны по вложимости и существует отображение $\Phi : I \times D \to G$, при каждом $t_0 \in I$ обладающее свойствами А, Б и свойством

В. Если $x(\cdot)$ — решение системы (1), то $\Phi(\cdot, x(\cdot))$ является решением системы (2).

△ Отображение Φ определим равенством

$$\Phi(t, x) \stackrel{\triangle}{=} y(t, t_*, \varphi_*(x(t_*, t, x))). \tag{4}$$

Покажем, что Φ обладает свойствами А, Б и В.

1. Зафиксируем $t = t_0$ и рассмотрим функцию $\Phi(t_0, x)$. Каждому $x \in D$ эта функция ставит в соответствие единственное $y = \Phi(t_0, x) \in G$. Пусть некоторое $\bar{y} \in G$. В силу продолжимости всех решений системы (2) уравнение $\bar{y} = y(t_0, t_*, \varphi)$ имеет единственное решение $\bar{\varphi} = y(t_*, t_0, \bar{y})$. Так как в силу взаимной однозначности φ_* и продолжимости решений системы (1) уравнение $\bar{\varphi} = \varphi_*(x(t_*, t_0, x))$ тоже имеет единственное решение $\bar{x} = x(t_0, t_*, \varphi_*^{-1}(\bar{\varphi}))$, то уравнение $\bar{y} = \Phi(t_0, x)$ имеет единственное решение при любом фиксированном $t_0 \in I$. Тем самым свойство А отображения Φ доказано.

2. Докажем свойство В функции Φ. С этой целью предположим, что $x(\cdot)$ — некоторое решение системы (1). Тогда

$$x(t_*, t, x(t)) \stackrel{t}{\equiv} x(t_*)$$

и потому

$$\Phi(t, x(t)) \equiv y(t, t_*, \varphi_*(x(t_*))).$$

Свойство В функции Φ доказано.

3. Для завершения доказательства леммы отметим, что свойство Б функции Φ следует из аналогичного свойства функции φ_* и равенства

$$y(\cdot, t_0, \Phi(t_0, x_0)) - x(\cdot, t_0, x_0) = y(\cdot, t_*, \varphi_*(x_*)) - \\ - x(\cdot, t_*, x_*),$$

где $x_* \stackrel{\triangle}{=} x(t_*, t_0, x_0)$. $\triangle$

Замечания. 1. Если выполнены все условия леммы, кроме условия продолжимости решений систем (1) и (2), то всегда существуют такие подобласти

$$D_1 \stackrel{\triangle}{=} \{(t, x) : x = x(t, t_*, x_0),\ t \in I_{x0},\ x_0 \in D\} \subset D$$

и

$$G_1 \stackrel{\triangle}{=} \{(t, y) : y = y(t, t_*, y_0),\ t \in I_{y0},\ y_0 \in G\} \subset G$$

(I_{x0} и I_{y0} — максимальные интервалы существования решений $x(\cdot, t_*, x_0)$ и $y(\cdot, t_*\ y_0)$), что сужения систем (1) и (2) на D_1 и G_1 соответственно являются эквивалентными по вложимости. Нельзя, однако, утверждать, что системы (1) и (2) будут эквивалентны по вложимости. В качестве примера рассмотрим два уравнения:

$$\dot{x} = \begin{cases} -x^2, & \text{если } tx \leqslant 1 \\ -x^3 t, & \text{если } tx > 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \dot{y} = -y^2.$$

Для этих уравнений выполнены все условия леммы, кроме продолжимости решений (здесь $I = D = G]-\infty, \infty[$, $t_* = 0$, $\varphi_*(x) \equiv x$). Рассматриваемые уравнения не эквивалентны по вложимости, но их сужения на области $D_1 \stackrel{\triangle}{=} G_1 \stackrel{\triangle}{=} \{(t, x) : tx \leqslant 1\}$ эквивалентны, так как в $D_1 = G_1$ эти уравнения попросту совпадают.

2. Всюду далее будем считать, что отображение φ в определении эквивалентности по вложимости при каждом $t_0 \in I$ обладает свойствами А, Б и В. Из леммы следует, что это не нарушает общности дальнейших рассуждений. (При доказательстве этого замечания следует помнить, что здесь роль φ_* может выполнять любая из функций $\varphi(t_0, \cdot)$, $t_0 \in I$.)

3. Из определения функции Φ (см. (4)) следует, что если функции f, g и φ_* голоморфны, то функция Φ, обладающая свойствами А, Б и В, тоже голоморфна в некоторой подобласти $I \times D$.

Обозначения. Для любой нужное число раз дифференцируемой функции $\Psi : I \times D \times G \to \mathbf{R}$ и любого натурального k положим

$$\Psi^{(0)} \stackrel{\triangle}{=} \Psi,\quad \Psi^{(k+1)} \stackrel{\triangle}{=} \frac{\partial \Psi^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^{(k)}}{\partial x} f + \frac{\partial \Psi^{(k)}}{\partial y} g.$$

Тогда из тождеств $z_i(t) \equiv \varphi_i(t, x(t)) - x_i(t)$ в силу четвертого условия теоремы определяется $x(t)$.

Решение системы (2) находится согласно формуле $y(t) = \varphi(t, x(t))$. $\triangle$

Замечание. Если в теореме 2 отказаться от условия (4), то, как следует из пункта а) доказательства, системы (1) и (2) будут эквивалентны, но интегрируемость систем (1) и (2) доказать невозможно. В качестве примера достаточно взять два скалярных эквивалентных по вложимости уравнения

$$\dot{x} = x^2 + t^2 \text{ и } \dot{y} = (y - e^t)^2 + t^2 + e^t.$$

Глава III. ЧЕТНОСТЬ И ПЕРИОДИЧНОСТЬ

§ 1. Отображение за период. Общий принцип и основная лемма

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(t, x), \ x = (x_1, \ldots, x_n)^T. \qquad (X)$$

Будем считать, что эта система задана при всех $t \in \mathbf{R}$ и $x \in \mathbf{R}^n$ и удовлетворяет следующим условиям.

А. При всех (t_0, x_0) из области задания системы задача Коши для системы (X) имеет единственное решение $x(t; t_0, x_0)$, $t \in I$.

Б. Правая часть системы (X) периодична по t с периодом 2π, т. е. $X(t+2\pi, x) \equiv X(t, x)$.

Всюду в дальнейшем будем требовать выполнения условий А и Б. Требование 2π-периодичности правой части системы можно заменить требованием периодичности ее с любым периодом 2ω.

Пусть $x(t, x_0)$ означает то решение системы (X), которое при $t=0$ принимает значение x_0, а $D \subset \mathbf{R}^n$ есть множество тех точек $x_0 \in \mathbf{R}^n$, для которых решения $x(t, x_0)$ определены на некотором интервале, включающем сегмент $[-\pi, \pi]$. Отображение

$$T : D \to \mathbf{R}^n, \ T : x(-\pi, x_0) \to x(\pi, x_0)$$

будем называть отображением за период для системы (X).

Хорошо известно [23, с. 12] следующее предложение, именуемое далее общим принципом.

Общий принцип. Для того чтобы продолжимое на

$[-\pi, \pi]$ решение $x(t, x_0)$ системы (X) было 2π-периодическим, необходимо и достаточно, чтобы точка $x(-\pi, x_0)$ была неподвижной точкой отображения за период T, т. е. $x(-\pi, x_0)=x(\pi, x_0)$.

Необходимость очевидным образом следует из 2π-периодичности решения $x(t, x_0)$.

Достаточность. Наряду с решением $x(t, x_0)$ функция $x(t+2\pi, x_0)$ также является решением системы (X). По условию решение $x(t, x_0)$ определено на некотором интервале $I \supset [-\pi, \pi]$. Поэтому $x(t+2\pi, x_0)$ определено при всех $t \in [-3\pi, -\pi]$. При $t=-\pi$ эти два решения имеют одно и то же значение $x(-\pi, x_0)=x(\pi, x_0)$, совпадающее с неподвижной точкой отображения T. Тогда в силу единственности решения задачи Коши эти два решения обязаны совпадать, т. е. должно выполняться тождество $x(t+2\pi, x_0) \equiv x(t, x_0)$, из которого следуют продолжимость решения на всю числовую ось и его 2π-периодичность. $\triangle$

Пусть теперь $x(t)$ есть произвольное решение системы (X). Как известно, его можно единственным образом представить в виде суммы $x(t)=x_ч(t)+x_н(t)$ четной $x_ч(t)=\dfrac{x(t)+x(-t)}{2}$ и нечетной $x_н(t)=\dfrac{x(t)-x(-t)}{2}$ вектор-функций. Имеет место следующая

Основная лемма. Продолжимое на сегмент $[-\pi, \pi]$ решение $x(t)$ системы (X) является 2π-периодическим тогда и только тогда, когда $x_ч(\pi)=0$.

$\triangle$ Пусть $x(t)$ — 2π-периодическое решение системы (X). Тогда

$$x_н(\pi)=\frac{1}{2}[x(\pi)-x(-\pi)]=\frac{1}{2}[x(-\pi+2\pi)-x(-\pi)]=0$$

и необходимость доказана.

Пусть теперь $x(t)$ есть решение системы (X), для которого $x_н(\pi)=0$. Тогда $x(\pi)-x(-\pi)=2x_н(\pi)=0$ и потому $x(-\pi)=x(\pi)$. Таким образом, точка $x(-\pi)$ — неподвижная точка отображения за период, а решение $x(t)$ согласно основному принципу — 2π-периодическое решение. $\triangle$

Доказанная лемма вопрос о периодичности решения $x(t)$ сводит к вычислению одного из значений нечетной части $x_н(t)$. Во многих случаях относительно $x_н(t)$ можно сказать больше, чем о самом решении $x(t)$. Это обстоятельно позволит в некоторых случаях делать различные заключения относительно существования периодических решений у систем вида (X).

§ 2. Один метод нахождения начальных условий периодических решений

Как и в § 1, будем рассматривать систему

$$\dot{x}=X(t,x),\ x=(x_1,\ldots,x_n)^T,\ (t,x)\in\mathbf{R}^{1+n}, \qquad (X)$$

считая, что она удовлетворяет условиям А и Б. Пусть $x(t)$ есть некоторое решение системы (X). Тогда вектор-функция $x(-t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\dot{y}=-X(-t,y). \qquad (\overline{X})$$

Эта система, так же как и система (X), удовлетворяет условиям А и Б. Пусть $x(t, x_0)$ означает то решение системы (X), которое при $t=0$ принимает значение x_0, а I_{x_0} — «максимальный» симметричный интервал вида $]-\beta, \beta[$, на котором определено это решение. Через Δ_0 обозначим множество всех точек x_0, для которых $I_{x_0}\supset\supset[-\pi,\pi]$. Из непрерывной зависимости решений от начальных данных следует, что множество Δ_0 обязано быть открытым. Функции $x(t,x_0)$ и $x(-t,x_0)$ определены на открытом, симметричном относительно гиперплоскости $t=0$ множестве

$$\Delta\overset{\Delta}{=}\{(t,x_0):x_0\in\Delta_0,\ t\in I_{x_0}\}.$$

Положим

$$D_0\overset{\Delta}{=}\{x=x(t,x_0):x_0\in\Delta_0,\ t\in I_{x_0}\},$$

$$D\overset{\Delta}{=}\{(t,x):x=x(t,x_0),\,x_0\in\Delta_0,\,t\in I_{x_0}\}.$$

Лемма 1. Существует дифференцируемая функция $F(t,x)$, $F:D\to D_0$, для которой справедливы тождества

$$F(t,x(t,x_0))\equiv x(-t,x_0),\ (t,x_0)\in\Delta, \qquad (1)$$

$$F(0,x)\equiv x,\ x\in\Delta_0, \qquad (2)$$

$$F(-t,F(t,x))\equiv x,\ (t,x)\in D, \qquad (3)$$

и которая удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)X(t,x)+X(-t,F(t,x))=0. \qquad (4)$$

$\triangle$ Пусть $\varphi(t; t_0, x_0)$, $\varphi(t_0; t_0, x_0)=x_0$, есть общее решение системы (X). Тогда $\varphi(t; 0, x_0)\equiv x(t, x_0)$.

Положим

$$F(t, x)\overset{\triangle}{=}\varphi(-t; 0, \varphi(0; t, x)).$$

Так как решения системы (X) единственным образом определяются своими начальными данными, то

$$F(t, x(t, x_0))=\varphi(-t; 0, x_0)=x(-t, x_0).$$

Это значит, что для так определенной функции F выполнено тождество (1). Положив в нем $t=0$, получим тождество (2).

Заменив теперь в тождестве (1) t на $-t$, получим тождество

$$F(-t, x(-t, x_0))\equiv x(t, x_0),$$

в котором вектор-функцию $x(-t, x_0)$ заменим выражением, стоящим в левой части тождества (1). Это приведет к тождеству

$$F(-t, F(t, x(t, x_0)))\equiv x(t, x_0),$$

равносильному тождеству (3).

Покажем, что функция F удовлетворяет системе уравнений (4). Для этого продифференцируем тождество (1) по t, учитывая, что $x(t, x_0)$ — решение системы (X), а $x(-t, x_0)$ — системы $(\overline{X})$. Получим тождество

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x(t, x_0))+\frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t, x_0))X(t, x(t, x_0))\equiv$$
$$\equiv -X(-t, x(-t, x_0)).$$

Заменив в нем $x(-t, x_0)$ левой частью тождества (1), получим тождество, равносильное (4), так как для любой точки $(t, x)\in D$ существует $x_0\in\Delta_0$, при котором $x(t, x_0)=x$. $\triangle$

Доказанная лемма устанавливает взаимно однозначное соответствие между решениями $x(t, x_0)$ системы (X) и функциями $x(-t, x_0)$, являющимися решениями системы $(\overline{X})$. Оказывается, что это соответствие всегда можно записать с помощью дифференцируемой функции $y=F(t, x)$, которая есть решение системы уравнений в частных производных (4) с начальными условиями (2). Кроме того, функция F удовлетворяет соотношениям (3).

Лемма 2. Пусть для системы (X) возможно указать функцию $F(t, x)$, $F: G \to \mathbf{R}^n$ (G — некоторое множество в $\mathbf{R}^{1+n}$), удовлетворяющую системе уравнений (4) и начальным условиям (2). Тогда для любого, определенного при $t=0$ решения $x(t), t \in I$, системы (X), для которого $(t, x(t)) \in G$, выполняется тождество

$$F(t, x(t)) \overset{t}{\equiv} x(-t), \ t \in I, \tag{5}$$

а вместе с ним и тождество (3).

$\triangle$ Пусть $x(t), t \in I$, — решение системы (X). Положим $y(t) \overset{\triangle}{=} F(t, x(t))$. Так как функция F — решение системы (4), то

$$\frac{dy(t)}{dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t)) \cdot X(t, x(t)) \equiv$$
$$\equiv -X(-t, y(t)),$$

т. е. функция $y(t)$ является решением системы $(\overline{X})$ с начальными условиями

$$y(0) = F(0, x(0)) = x(0).$$

Функция $x(-t)$ также является решением системы $(\overline{X})$, причем $x(-t)|_{t=0} = x(0) = y(0)$. Поэтому в силу единственности решения задачи Коши должно выполняться тождество $y(t) \equiv x(-t)$. Тем самым соотношение (5) доказано. Для доказательства соотношения (3) заметим, что согласно тождеству (5) для каждого решения $x(t)$ системы (X), для которого $(t, x(t)) \in D$, справедливы тождества

$$F(-t, F(t, x(t))) \equiv F(-t, x(-t)) \equiv x(t).$$

Из последних тождеств и произвольности выбора решения $x(t)$ и следует соотношение (3). $\triangle$

Теорема 1. Для каждой системы (X), удовлетворяющей условиям А и Б, существует функция $F(t, x)$, $F: D \to \mathbf{R}^n$, которая является решением системы уравнений в частных производных

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} X(t, x) + X(-t, F) = 0$$

с начальными условиями (2) и удовлетворяет тождеству (3). При этом решение $x(t)$ системы (X) будет 2π-

периодическим тогда и только тогда, когда оно продолжимо на сегмент $[-\pi, \pi]$ и $\lambda \stackrel{\Delta}{=} x(\pi)$ удовлетворяет системе уравнений

$$F(\pi, \lambda) = \lambda. \tag{6}$$

$\triangle$ Существование функции F доказано в лемме 1. Пусть $x(t)$ — 2π-периодическое решение системы (X). Тогда оно продолжимо на сегмент $[-\pi, \pi]$ и $x(-\pi) = x(\pi)$. Согласно лемме 2 для этого решения выполняется тождество (5). Полагая в этом тождестве $t = \pi$, получим равенства

$$x(-\pi) = F(\pi, x(\pi)) = x(\pi),$$

из которых следует необходимость выполнения условия (6).

Пусть теперь $x(t)$ есть некоторое, продолжимое на сегмент $[-\pi, \pi]$ решение системы (X) и $\lambda = x(\pi)$ удовлетворяет системе (6). Тогда по лемме 2 для рассматриваемого решения $x(t)$ выполняется тождество (5), из которого при $t = \pi$ получим векторные равенства

$$x(-\pi) = F(\pi, x(\pi)) = x(\pi).$$

Таким образом, $x(-\pi) = x(\pi)$ — неподвижная точка отображения за период, а решение $x(t)$ согласно основному принципу — 2π-периодическое.

Теорема 2. Пусть для системы (X), удовлетворяющей условиям А и Б, указана функция $F(t, x)$, $F: G \to \mathbf{R}^n$ (G — некоторая область в $\mathbf{R}^{1+n}$), удовлетворяющая системе уравнений (4) и начальным условиям (2). Тогда продолжимое на $[-\pi, \pi]$ решение $x(t)$ системы (X), для которого при всех $t \in [-\pi, \pi]$ точка $(t, x(t)) \in G$, будет 2π-периодическим, если и только если вектор $\lambda \stackrel{\Delta}{=} x(\pi)$ удовлетворяет системе уравнений (6).

$\triangle$ В данном случае область G может не совпадать с множеством D, т. е. быть собственной частью множества D. Однако условие $(t, x(t)) \in G$ позволяет доказать теорему 2, повторяя соответствующую часть доказательства теоремы 1. $\triangle$

Следствие 1. Пусть для системы (X), удовлетворяющей условиям А и Б, указана функция $F(t, x)$, $F: \mathbf{R}^{1+n} \to \mathbf{R}^n$, удовлетворяющая системе уравнений (4) и начальным условиям (2). Тогда продолжимое на

$[-\pi, \pi]$ решение $x(t)$ системы (X) будет 2π-периодическим, если и только если вектор $\lambda \overset{\Delta}{=} x(\pi)$ удовлетворяет системе уравнений (6).

$\triangle$ В данном случае G совпадает со всем пространством $\mathbf{R}^{1+n}$. Поэтому требование $(t, x(t)) \in G$ можно опустить.

Следствие 2. Пусть $\mathbf{P}(t)$ — непрерывная на $\mathbf{R}$ 2π-периодическая $n \times n$-матрица, для которой $\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(-t) \equiv E\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — некоторая скалярная четная функция, а E — единичная $n \times n$-матрица. Тогда если $\int\limits_0^\pi \varphi(t)\,dt = 0$, то все решения линейной системы $\dot{x} = \mathbf{P}(t)x$ — 2π-периодические, если же $\int\limits_0^\pi \varphi(t)\,dt \neq 0$, то единственным 2π-периодическим решением этой системы является решение $x(t) \equiv 0$.

$\triangle$ В этом случае $F(t, x) = x \exp\left[-\int\limits_0^t \varphi(\tau)\,d\tau\right]$. $\triangle$

Примечание. Теоремы 1 и 2 и следствие 1 обосновывают следующий метод отыскания начальных данных периодических решений дифференциальных систем вида (X). Определяем функцию $F(t, x)$, которая является решением системы уравнений (4) с начальными условиями (2) и дополнительно удовлетворяет тождеству (3). Воспользовавшись доказанными теоремами, из системы уравнений $F(\pi, \lambda) = \lambda$ находим начальные данные периодических решений системы (X). Определив приближенно функцию F как решение системы уравнений в частных производных (4) с начальными условиями (2), будем иметь возможность найти приближенно из уравнения (6) начальные данные периодических решений системы (X). Для облегчения отыскания функции F желательно, в тех случаях, когда это возможно, используя структуру системы (X), а также тождества (2) и (3), установить предварительно структуру функции F, после чего методом неопределенных коэффициентов из уравнения (4) найти саму функцию F. В следующем параграфе мы проиллюстрируем этот метод, применяя его к уравнению Риккати.

§ 3. Периодические решения уравнения Риккати

Рассмотрим уравнение Риккати

$$\dot{x} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2 \tag{1}$$

с 2π-периодическими и дифференцируемыми на $\mathbf{R}$ коэффициентами $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$. Соответствующее уравнение для $y = x(-t)$ имеет вид

$$\dot{y} = -a(-t) - b(-t)y - c(-t)y^2. \tag{2}$$

Попытаемся определить для уравнения (1) функцию $F(t, x)$, удовлетворяющую условиям теоремы 1 предыдущего параграфа. С этой целью установим структуру функции F.

Предположим, что уравнение (1) имеет хотя бы одно продолжимое на сегмент $[-\pi, \pi]$ решение. Пусть $\varphi(t), t \in I$, — одно из таких решений. Подстановка $x = z + \varphi(t)$ сведет уравнение (1) к уравнению Бернулли

$$\dot{z} = p(t)z + c(t)z^2,$$

где функция $p(t) \triangleq b(t) + 2\varphi(t)c(t)$ определена на интервале I, содержащем, по предположению, сегмент $[-\pi, \pi]$. Интегрируя это уравнение, получим общее решение уравнения (1) в виде

$$x(t) = \varphi(t) + \frac{A(t)}{\lambda - B(t)}, \tag{3}$$

где $\lambda \in]-\infty, \infty[$ — некоторая, не зависящая от t постоянная, а функции $A(t) \triangleq \exp \int\limits_0^t p(\tau)\,dt$ и $B(t) \triangleq \int\limits_0^t c(s)A(s)\,ds$ заданы при всех $t \in I$. Отметим, что для всех $t \in I$ верно неравенство $A(t) \neq 0$. ~~а соответствие $\lambda \to x(t)$ взаимно однозначно, если под $x(t)$ понимать решение уравнения (1), определенное при $t=0$.~~ Из формулы (3), заменяя t на $-t$, получим

$$x(-t) = \varphi(-t) + \frac{A(-t)}{\lambda - B(-t)}. \tag{4}$$

Исключая λ из формул (3) и (4), получим соотношение

$$x(-t) = \frac{m(t)x(t) + r(t)}{s(t)x(t) + m(-t)}, \tag{5}$$

где

$$s(t) \triangleq B(t) - B(-t),$$
$$m(t) \triangleq A(-t) + \varphi(t)s(t), \tag{6}$$
$$r(t) \triangleq A(t)\varphi(-t) - A(-t)\varphi(t) - s(t)\varphi(t)\varphi(-t).$$

Таким образом, для уравнения Риккати функция $F(t, x)$ имеет вид

$$F(t, x) = \frac{m(t)x + r(t)}{s(t)x + m(-t)}. \tag{7}$$

Причем, как видно из формул (6), каждая из функций m, s, r определена и дифференцируема при всех $t \in I$, функции $r(t)$ и $s(t)$ нечетны, $m(0)=1$, а функции $m(-t)$ и $s(t)$ не обращаются одновременно в нуль.

Пусть $x(t)$, $t \in I_x$, — продолженное решение уравнения (1), определенное при $t=0$. Тогда формула (5) будет справедлива при всех $t \in I_x \cap I$. В соответствии с этим функция $F(t, x)$ будет определена в некоторой области G, содержащей прямую $t=0$ и расположенной в плоскости (t, x). Область G будет содержать в себе область D, построенную в предыдущем параграфе.

Теорема 1. Для уравнения Риккати вида (1) с непрерывными на $\mathbf{R}$ и 2π-периодическими коэффициентами $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ имеет место лишь один из следующих случаев.

1. Уравнение (1) не имеет периодических решений.

2. Уравнение (1) имеет только одно 2π-периодическое решение.

3. Уравнение (1) имеет только два 2π-периодических решения.

4. Все решения уравнения (1), определенные при $t \in [-\pi, \pi]$, являются 2π-периодическими.

$\triangle$ Если ни одно из решений уравнения (1) непродолжимо на сегмент $[-\pi, \pi]$, то уравнение (1) не имеет периодических решений, а, значит, имеет место первый случай.

Пусть уравнение (1) имеет хотя бы одно решение, определенное при всех $t \in [-\pi, \pi]$. Тогда справедливы рассуждения, предшествующие формулировке теоремы, из которых следует, что сужение $F: D \to \mathbf{R}$ функции $F(t, x)$, определяемой формулой (7), удовлетворяет всем условиям теоремы 1 предыдущего параграфа. На основании этой теоремы решение $x(t)$ будет 2π-периодическим тогда и только тогда, когда $\lambda \stackrel{\triangle}{=} x(\pi)$ является действительным решением уравнения

$$\frac{m(\pi)\lambda + r(\pi)}{s(\pi)\lambda + m(-\pi)} = \lambda$$

или равносильного ему уравнения

$$s(\pi)\lambda^2 - [m(\pi) - m(-\pi)]\lambda - r(\pi) = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) может не иметь действительных решений, иметь одно или два действительных решения или вырождаться в тождество. В соответствии с этим будем иметь один из четырех случаев, указанных в формулировке теоремы. △

Примечание. Нижеследующие примеры показывают, что каждый из указанных случаев может осуществиться.

Примеры.

1. $\dot{x}=(x^2+1)(2+\sin t)$.
2. $\dot{x}=x^2(2+\sin t)$.
3. $\dot{x}=(x^2-1)(2+\sin t)$.
4. $\dot{x}=x^2\sin t$.

О том, что уравнение Риккати при $a(t)\neq 0$ не может иметь более двух периодических решений, было известно ранее [9, с. 128].

В дальнейшем будем рассматривать уравнение Риккати вида

$$\dot{z}=a(t)+c(t)z^2. \tag{9}$$

Это не нарушит общности последующих рассуждений, так как уравнение общего вида (1) приводится к виду (9) линейной взаимно однозначной заменой

$$x=z\exp\int\limits_0^t [b(\tau)+2\alpha c^2(\tau)]\,d\tau+\alpha c(t),$$

которая не изменяет периодичности решений, если в качестве постоянной α взять корень уравнения

$$2\alpha\int\limits_0^{2\pi} c^2(\tau)\,d\tau+\int\limits_0^{2\pi} b(\tau)\,d\tau=0.$$

Далее уравнение (9) будем записывать в виде

$$\dot{x}=a(t)+c(t)x^2. \tag{10}$$

Выше было установлено, что функция $F(t,x)$ для уравнения (10) имеет вид (7). Полагая

$$z(t)\overset{\triangle}{=}\frac{m(t)+m(-t)}{2} \text{ и } n(t)\overset{\triangle}{=}\frac{m(t)-m(-t)}{2},$$

формулу (7) перепишем в виде

$$F(t,x)=\frac{[z(t)+n(t)]x+r(t)}{s(t)x+z(t)-n(t)}, \tag{11}$$

где функции n, r, s — нечетные, $z(t)$ — четная и $z(0)=1$. При этом все функции $n(t)$, $r(t)$, $s(t)$ и $z(t)$ определены и дифференцируемы на некотором интервале I, который содержит интервал существования произвольно выбранного нами решения $\varphi(t)$ уравнения (10). Кроме того, всюду на I функции $z(t)-n(t)$ и $s(t)$ одновременно в нуль не обращаются. Будем считать, что $\varphi(t)$ — решение уравнения (10), для которого $I\supset[-\pi,\pi]$. Пусть $M(t)$ есть некоторая четная, определенная и необращающаяся на I в нуль функция, для которой $M(0)=1$. Тогда функция $F(t,x)$ наряду с формулой (11) может быть задана также формулой

$$F(t,x)=\frac{[M(t)z(t)+M(t)n(t)]x+M(t)r(t)}{M(t)s(t)x+M(t)z(t)-M(t)n(t)}.$$

Подберем $M(t)$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{d(Mz)}{dt}=(Mr)c_{\text{ч}}-(Ms)a_{\text{ч}},$$

где

$$c_{\text{ч}}(t)\overset{\triangle}{=}\frac{c(t)+c(-t)}{2},\quad a_{\text{ч}}(t)\overset{\triangle}{=}\frac{a(t)+a(-t)}{2}.$$

Для этого достаточно положить

$$M(t)\overset{\triangle}{=}\exp\int_0^t\frac{r(\tau)c_{\text{ч}}(\tau)-s(\tau)a_{\text{ч}}(\tau)-z'(\tau)}{z(\tau)}\,d\tau.$$

Из последнего равенства видно, что функция $M(t)$ четная, отличная от нуля и $M(0)=1$. К сожалению, интервал определения I_0 этой функции может не совпадать со всем интервалом I, если для некоторого $\tau\in I$ выполняется равенство $z(\tau)=0$. Пусть t — ближайший к точке $t=0$ нуль функции $z(t)$. В этом случае в точке t функции $M(z-n)$ и Mn будут либо не определены, либо одновременно обращаться в нуль.

Принимая во внимание вышеизложенное, будем считать, что в формуле (11) нечетные функции $n(t)$, $r(t)$, $s(t)$ и четная функция $z(t)$, полученные из прежних умножением на $M(t)$, определены на некотором интервале $I_0\subseteq I$ и удовлетворяют там соотношению

$$\dot z=rc_{\text{ч}}(t)-sa_{\text{ч}}(t). \tag{12}$$

Как известно, функция $F(t,x)$ удовлетворяет уравнению (4) из предыдущего параграфа, которое в нашем случае принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}[a(t)+c(t)x^2]+a(-t)+c(-t)F^2=0. \qquad (13)$$

Подставим выражение (11) в уравнение (13) и воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. После элементарных выкладок, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и учитывая равенство (12), получим соотношения (14), приведенные в формулировке теоремы 2. (Следует подчеркнуть, что для дальнейших рассуждений не важно, каким образом соотношения (14) были получены.)

Теорема 2. Пусть

$$a_{\text{ч}}(t)\triangleq\frac{a(t)+a(-t)}{2},\ a_{\text{н}}(t)\triangleq\frac{a(t)-a(-t)}{2},$$

$$c_{\text{ч}}(t)\triangleq\frac{c(t)+c(-t)}{2},\ c_{\text{н}}(t)\triangleq\frac{c(t)-c(-t)}{2}$$

и $(r(t), s(t), n(t), z(t))$ — решение линейной системы

$$\begin{aligned} r' &= -2na_{\text{н}}(t)-2za_{\text{ч}}(t),\\ s' &= -2nc_{\text{н}}(t)+2zc_{\text{ч}}(t),\\ n' &= \quad rc_{\text{н}}(t)+sa_{\text{н}}(t),\\ z' &= \quad rc_{\text{ч}}(t)-sa_{\text{ч}}(t)\end{aligned} \qquad (14)$$

с начальными условиями $r(0)=s(0)=n(0)=0$, $z(0)=1$. Тогда решение $x(t)$, $t\in I$, уравнения (10) будет 2π-периодическим тогда и только тогда, когда $I\supset[-\pi, \pi]$ и

$$s(\pi)x^2(\pi)-2n(\pi)x(\pi)-r(\pi)=0. \qquad (15)$$

△ В основе доказательства лежит теорема 1 предыдущего параграфа применительно к уравнению (10).

Функции $r(t), s(t), n(t), z(t)$ как решения линейной системы (14) существуют при всех $t\in\mathbf{R}$. Определим функцию

$$\Phi(t, x)\triangleq\frac{[z(t)+n(t)]x+r(t)}{s(t)x+z(t)-n(t)},$$

считая областью определения ее ту «максимальную» связную часть G плоскости (t, x), которая содержит прямую $t=0$ и на которой правая часть записанного равенства непрерывна. Всюду в G функция Φ дифферен-цируема, и $\Phi(0, x) \equiv x$.

Покажем, что функция Φ — решение уравнения (13), для чего подставим выражение для Φ в левую часть уравнения (13) и используем равенства (14) (для сокращения записей условимся вместо $a(t)$ и $a(-t)$ писать соответственно a и $\bar{a}$, вместо $c(t)$ и $c(-t)$ — c и $\bar{c}$). Имеем

$$(sx+z-n)^2\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}(a+cx^2)+\bar{a}+\bar{c}\Phi^2\right]=$$
$$=[(z'+n')x+r'][sx+z-n]-$$
$$-[(z+n)x+r][s'x+z'-n']+(z^2-n^2-sr)(a+cx^2)+$$
$$+\bar{a}(sx+z-n)^2+\bar{c}[(z+n)x+r]^2=$$
$$=[(rc-s\bar{a})x-2na_{\text{н}}-2za_{\text{ч}}][sx+z-n]-[(z+n)x+r]\times$$
$$\times[(2zc_{\text{ч}}-2nc_{\text{н}})x+(r\bar{c}-sa)]+$$
$$+(z^2-n^2-rs)(a+cx^2)+\bar{a}(sx+z-n)^2+\bar{c}[(z+n)x+r]^2.$$

Последнее выражение тождественно равно нулю. В этом можно убедиться, собирая члены с x^2, x^1 и x^0, а затем приводя подобные члены. Таким образом, функция Φ есть решение уравнения (13) с начальными условиями $\Phi(0, x)=x$.

Пусть

$$F(t, x)=\frac{[z_0(t)+n_0(t)]x+r_0(t)}{s_0(t)x+z_0(t)-n_0(t)}$$

есть функция, которая каждому решению $x(t, x_0)$ уравнения (10) ставит в соответствие функцию $x(-t, x_0)$ и существование которой обеспечивается теоремой 1 предыдущего параграфа. Из предшествующих доказываемой теореме рассуждений следует (см. стр. 80), что функции $r_0(t)$, $s_0(t)$, $n_0(t)$, $z_0(t)$ определены и дифференцируемы на интервале I, содержащем сегмент $[-\pi, \pi]$. При этом функции $s_0(t)$, $z_0(t)-n_0(t)$ не обращаются в нуль одновременно. Пусть D есть область определения функции F. В силу единственности соответствующей задачи Коши для уравнения (13) [40, с. 66] функции F и Φ обязаны совпадать в области $G\cap D$, так как $F(0, x)\equiv\Phi(0, x)\equiv x$. Поэтому для всех t из некоторого интервала будут выполнены тождества

$$
\begin{gathered}
m(t)s_0(t)\equiv m_0(t)s(t),\\
m(t)m_0(-t)+r(t)s_0(t)\equiv m(-t)m_0(t)+r_0(t)s(t), \quad (16)\\
m_0(-t)r(t)\equiv m(-t)r_0(t),
\end{gathered}
$$

где $m(t)\overset{\Delta}{=}z(t)+n(t)$, $m_0(t)\overset{\Delta}{=}z_0(t)-n_0(t)$.

Покажем, что область G не может быть частью области D. Действительно, область G может быть частью области D только тогда, когда при некотором $\tau\in I$ будут выполняться равенства

$$m(-\tau)=s(\tau)=0. \quad (17)$$

При $t=\tau$ тождества (16) примут вид равенств

$$
\begin{gathered}
m(\tau)s_0(\tau)=0,\\
m(\tau)m_0(-\tau)+r(\tau)s_0(\tau)=0, \quad (18)\\
m_0(-\tau)r(\tau)=0.
\end{gathered}
$$

Рассмотрим два случая: $r(\tau)=0$ и $r(\tau)\neq 0$. Пусть $r(\tau)=0$. Так как $s_0(\tau)$ и $m_0(-\tau)$ одновременно в нуль не обращаются, то из первых двух равенств (18) получим равенство $m(\tau)=0$. Таким образом, будут справедливы следующие равенства

$$m(-\tau)=s(\tau)=r(\tau)=m(\tau)=0,$$

из которых следует, что

$$r(\tau)=s(\tau)=z(\tau)=n(\tau)=0.$$

Из этих равенств и единственности решения задачи Коши для линейной однородной системы (14) следуют тождества

$$r(t)\equiv s(t)\equiv z(t)\equiv n(t)\equiv 0,\ t\in\mathbf{R},$$

которые противоречат равенству $z(0)=1$. Пусть теперь $r(\tau)\neq 0$. Тогда из равенств (18) (см. два последних равенства) получим равенства $m_0(-\tau)=s_0(\tau)=0$, которые, как уже отмечалось, не могут выполняться при $\tau\in I$. Это обстоятельство позволяет сделать следующий вывод: не существует $\tau\in I$, для которого выполняются равенства (17), и, значит, область определения функции Φ содержит в себе D — область определения функции F. Поэтому $\Phi(t, x)\equiv F(t, x)$ всюду в D. Ссылка на теорему 1 предыдущего параграфа завершает доказательство теоремы. Δ

Примечания. 1. Соотношение $n^2+rs-z^2=\mathrm{const}$ определяет первый стационарный интеграл системы (14). Поэтому, учитывая начальные условия, для искомых функций $r(t)$, $s(t)$, $n(t)$, $z(t)$ получим тождество $n^2(t)+r(t)s(t)-z^2(t)\equiv 1$.

2. Для уравнения вида $\dot{x}=a(t)-a(-t)x^2$ соответствующая система (14) имеет еще один стационарный интеграл $r-s=\mathrm{const}$, из которого следует тождество $r(t)\equiv s(t)$. Тогда для рассматриваемого дифференциального уравнения соответствующее уравнение (15) будет иметь вид

$$r(\pi)x^2(\pi)-2n(\pi)x(\pi)-r(\pi)=0.$$

Это уравнение всегда имеет действительные корни. Если этим корням будут соответствовать продолжимые на $[-\pi,\pi]$ решения, то согласно теореме 2 они обязаны быть 2π-периодическими (функция $a(t)$ считается непрерывной на $\mathbf{R}$ и 2π-периодической).

Изучению периодических решений уравнения Риккати посвящено много работ, например [41—44].

§ 4. Интегральные многообразия системы чет-нечет и периодические решения

Будем, как и в § 1, рассматривать систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=X(t,x),\ x=(x_1,\ldots,x_n)^T, \tag{X}$$

удовлетворяющую условиям А и Б (см. § 1). Пусть $x(t)$, $t\in I$, есть некоторое продолжимое на $[-\pi,\pi]$ решение этой системы, а $x_ч(t)$ и $x_н(t)$ соответственно его четная и нечетная части. Основная лемма из § 1 вопрос о периодичности решения $x(t)$ сводит к вычислению значения $x_н(\pi)$. Дифференцируемые функции $x_ч(t)$ и $x_н(t)$ удовлетворяют некоторой системе дифференциальных уравнений. Прежде чем выписать эту систему, заметим, что

$$\dot{x}_ч(t)+\dot{x}_н(t)\equiv X(t,x_ч(t)+x_н(t)),\ \forall t\in I, \tag{1}$$

так как $x_ч(t)+x_н(t)\equiv x(t)$ — решение системы (X). Заменяя в тождестве (1) (t) на $(-t)$ и учитывая, что производная четной функции есть функция нечетная, а производная нечетной функции — функция четная, получим тождество

$$-\dot{x}_ч(t)+\dot{x}_н(t)\equiv X(-t,x_ч(t)-x_н(t)). \tag{2}$$

Из тождеств (1) и (2) найдем производные

$$\dot{x}_{\text{ч}}(t)=\frac{1}{2}\left[X(t, x_{\text{ч}}(t)+x_{\text{н}}(t))-X(-t, x_{\text{ч}}(t)-x_{\text{н}}(t))\right],$$

$$\dot{x}_{\text{н}}(t)=\frac{1}{2}\left[X(t, x_{\text{ч}}(t)+x_{\text{н}}(t))+X(-t, x_{\text{ч}}(t)-x_{\text{н}}(t))\right].$$

Таким образом, вектор-функция

$$\begin{pmatrix} U(t) \\ V(t) \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} x_{\text{ч}}(t) \\ x_{\text{н}}(t) \end{pmatrix} \tag{3}$$

удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений порядка $2n$:

$$\begin{aligned} \dot{U}&=\frac{1}{2}\left[X(t, U+V)-X(-t, U-V)\right], \\ \dot{V}&=\frac{1}{2}\left[X(t, U+V)+X(-t, U-V)\right]. \end{aligned} \tag{$X_{\text{ч—н}}$}$$

При этом

$$U(0)=x_{\text{ч}}(0)=x_0,\ V(0)=x_{\text{н}}(0)=0.$$

Систему $(X_{\text{ч—н}})$ будем называть системой чет-нечет, соответствующей системе (X).

Решения системы чет-нечет, как следует из условия A, однозначно определяются своими начальными условиями. Поэтому справедлива следующая

Лемма. Пусть решения системы (X) однозначно определяются своими начальными условиями. Тогда единственным решением $(U(t), V(t))$ системы чет-нечет $(X_{\text{ч—н}})$ с начальными условиями $U(0)=x_0$, $V(0)=0$ будет вектор-функция (3), где $x_{\text{ч}}(t)$ и $x_{\text{н}}(t)$ — соответственно четная и нечетная части решения $x(t)$ системы (X) с начальными условиями $x(0)=x_0$.

Система чет-нечет, вообще говоря, более сложная, чем система (X). Она, однако, может допускать некоторые частные интегралы, позволяющие найти $V(t)$ для тех решений $(U(t), V(t))$, для которых $V(0)=0$, или может позволить получить некоторую информацию относительно $V(t)$. В этих случаях мы будем иметь соответствующую информацию о нечетной части $x_{\text{ч}}(t)$ решения $x(t)$ системы (X), а значит, и о самом решении $x(t)$. Примером этого могут служить следующие теоремы и следствия из них.

Теорема 1. Пусть система (X) удовлетворяет условиям А и Б из § 1, а для соответствующей системы $(X_{ч-н})$ известно интегральное многообразие, определяемое уравнением вида $V=F(t, U, V)$, где дифференцируемая функция F определена при всех t, U, V и удовлетворяет условию $F(\pi, U, V)\equiv F(-\pi, U, -V)$. Тогда каждому решению $U=x_0$ системы $F(0, U, 0)=0$ соответствует решение $x(t)$ системы (X) с начальными данными $x(0)=x_0$. Это решение будет 2π-периодическим всякий раз, когда оно продолжимо на сегмент $[-\pi, \pi]$.

$\triangle$ Пусть $x(t)$ есть продолжимое на $[-\pi,\pi]$ решение системы (X) и $F(0, x(0), 0)=0$. Нужно показать, что это решение периодическое. С этой целью рассмотрим решение $(U(t), V(t))$ системы $(X_{ч-н})$ с начальными данными $U(0)=x(0), V(0)=0$. По лемме $U(t)\equiv x_ч(t)$ и $V(t)\equiv x_н(t)$. Так как начальная точка $(0, x(0))$ лежит на интегральном многообразии (т. е. $V(0)=$ $=F(0, U(0), V(0))$, то $V(t)\equiv F(t, U(t), V(t))$ и потому $x_н(t)\equiv F(t, x_ч(t), x_н(t))$. Полагая в полученном тождестве $t=\pm\pi$ и учитывая четность и нечетность функций $x_ч(t)$ и $x_н(t)$, получим равенства

$$x_н(\pi)=F(\pi, x_ч(\pi), x_н(\pi)),$$
$$-x_н(\pi)=F(-\pi, x_ч(\pi), -x_н(\pi)),$$

из которых, используя условие теоремы, получим равенство $x_н(\pi)=-x_н(\pi)$, откуда следует, что $x_н(\pi)=0$. Тогда согласно основной лемме из § 1 решение $x(t)$ будет 2π-периодическим. $\triangle$

Следствие 1. Пусть система (X) удовлетворяет условиям А и Б из § 1 и $X(t, x)+X(-t, x)\overset{t,\,x}{\equiv}0$. Тогда все решения системы (X) суть 2π-периодические.

$\triangle$ В рассматриваемом случае линейное многообразие $V=0$ является интегральным. В этом можно убедиться, подставляя $U=U(t)$, $V=0$ в систему $(X_{ч-н})$. (См. также аналогичное утверждение в [45, с. 37].) $\triangle$

Следствие 2. Пусть для системы (X), удовлетворяющей условиям А и Б из § 1, возможно указать дифференцируемые на $\mathbf{R}$ $n\times n$-матрицу $A(t)$ и вектор-столбец $b(t)$ размерности n, для которых справедливы соотношения

$$[E-A(t)]X(t, (E+A(t))x+b(t))+$$

$$+[E+A(t)]X(-t,(E-A(t))x-b(t))\overset{t,x}{\equiv}2A'(t)x+$$
$$+2b'(t),\ A(\pi)=A(-\pi),\ b(\pi)=b(-\pi).$$

Тогда если $x(t)$ есть продолжимое на $[-\pi, \pi]$ решение системы (X) и $x(0)$ является решением линейной алгебраической системы $A(0)x(0)+b(0)=0$, то $x(t)$ — 2π-периодическое решение.

△ Здесь уравнение $V=A(t)U+b(t)$ задает требуемое многообразие. △

Компоненту с номером i вектор-функции $X(t, x)$ будем обозначать через $X_i(t, x)$.

Теорема 2. Пусть решения системы (X) с непрерывной в $\mathbf{R}^{1+n}$ правой частью однозначно определяются своими начальными условиями и

$$1)\ X(t+2\pi, x)\equiv X(t, x),\ (t, x)\in\mathbf{R}^{1+n};$$

2) для некоторого i и всех t, x, y имеет место неравенство

$$X_i(t, x)+X_i(-t, y)\neq 0.$$

Тогда система (X) не имеет периодических решений.

△ Пусть $x(t)$ — произвольное решение системы (X). Тогда, как было показано выше, $U=x_{ч}(t)$, $V=x_{н}(t)$ есть решение системы $(X_{ч-н})$. Рассмотрим компоненту $x_{iн}(t)$ вектор-функции $x_{н}(t)$, производная которой

$$\dot{x}_{iн}(t)\equiv\frac{1}{2}[X_i(t, x(t))+X_i(-t, x(-t))]\neq 0$$

не может изменить знака. Будем считать, что $\dot{x}_{iн}(t)>0$. Так как, кроме того, $x_{iн}(0)=0$, то при $t>0$ выполняется неравенство $x_{iн}(t)>0$. В частности, $x_{iн}(\pi)>0$. Тогда согласно основной лемме решение $x(t)$ не может быть 2π-периодическим. Аналогично доказывается, что у системы (X) нет периодических решений, период которых не совпадает с 2π. При этом следует воспользоваться тем, что вдоль периодического решения с периодом $\omega\neq 2\pi$ правая часть системы (X) имеет период, соизмеримый с ω [9, с. 21; 1, с. 487]. △

Пример. Система

$$\dot{x}=y^2+1+\sin t,\ \dot{y}=f(t, x, y)$$

не может иметь периодических решений.

Пусть правая часть $X(t, x)$ системы (X) голоморфна в $\mathbf{R}^{1+n}$ и пусть D и Δ_0 определены, как в § 2 (см. стр. 72). Тогда, как утверждает лемма 1 из § 2, существует функция F, для которой $F(t, x(t)) \equiv x(-t)$, где $x(t)$ — любое решение системы (X), начинающееся в Δ_0 при $t=0$. Проследив доказательство леммы 1 из § 2, убедимся в том, что голоморфность функции $X(t, x)$ влечет за собой голоморфность функции $F(t, x)$. Построим теперь последовательность голоморфных в D функций

$$\varphi^{(0)}(t, x) \stackrel{\Delta}{=} x - F(t, x),$$
$$\varphi^{(k+1)} \stackrel{\Delta}{=} \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial x} X, \ k \in \mathbf{N}_0. \tag{4}$$

Нетрудно увидеть, что продолжимое на $[-\pi, \pi]$ решение системы (X) будет φ-решением по отношению к последовательности (4) тогда и только тогда, когда нечетная часть $x_{н}(t) \stackrel{\Delta}{=} \dfrac{x(t)-x(-t)}{2}$ этого решения будет квазимногочленом. Учитывая это замечание и следствие из теоремы 2 (§ 4 гл. I), придем к следующей теореме.

Теорема 3. Пусть вектор-функция $X(t, x)$ голоморфна в $\mathbf{R}^{1+n}$. Тогда для того чтобы любая компонента нечетной части каждого решения системы (X), продолжимого на $[-\pi, \pi]$, была квазимногочленом, необходимо и достаточно существование натурального числа m и интегрального многообразия M системы $(X_{ч-н})$, содержащего плоскость $t=0, V=0, U=U$, для которых выполняются тождества

$$\begin{vmatrix} V_i^{(0)} & \dots & V_i^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots \\ V_i^{(m)} & \dots & V_i^{(2m)} \end{vmatrix} \equiv 0, \ (t, U, V) \in M, \ i = \overline{1; n},$$

где $V_i^{(k)}$ — k-я производная от V_i в силу системы $(X_{ч-н})$, а $V_i^{(0)} \stackrel{\Delta}{=} V_i$ — i-я компонента вектора V.

Можно доказать, что нечетная часть $x_{н}(t)$ любого решения $x(t)$ системы (X) является квазимногочленом тогда и только тогда, когда система (X) и система $\dot{y} = X(-t, y)$ эквивалентны по вложимости.

§ 5. Нечетно-эквивалентные системы

Наряду с n-мерной системой

$$\dot{x} = X(t, x), \ t \in \mathbf{R}, \ x \in D \subset \mathbf{R}^n, \tag{X}$$

будем рассматривать систему той же размерности

$$\dot{y}=Y(t, y), t\in\mathbf{R}, \ y\in\Delta\subset\mathbf{R}^n. \qquad (Y)$$

Будем считать, что D и Δ — области, а каждая из рассматриваемых систем удовлетворяет условиям А и Б из § 1. Пусть $x(t, x_0)$ и $y(t, y_0)$ — соответственно решения систем (X) и (Y) с начальными условиями

$$x(0, x_0)=x_0, \ y(0, y_0)=y_0.$$

Через $I_x(x_0)$ (соответственно $I_y(y_0)$) обозначим «максимальный» интервал вида $]-\beta, \beta[$, на котором определено решение $x(t, x_0)$ (соответственно $y(t, y_0)$). Пусть, как обычно,

$$x_{н}(t, x_0)\stackrel{\Delta}{=}\frac{1}{2}[x(t, x_0)-x(-t, x_0)],$$

$$y_{н}(t, y_0)\stackrel{\Delta}{=}\frac{1}{2}[y(t, y_0)-y(-t, y_0)]$$

означают нечетные части соответствующих решений, а $\|x\|$ — евклидову норму вектора x.

Определение. Системы (X) и (Y) назовем нечетно-эквивалентными, если существует взаимно однозначное соответствие $y_0=\varphi(x_0)$, $\varphi : D\to\Delta$, при котором $I_x(x_0)=$ $=I_y(\varphi(x_0))$ и для всех $t\in I_x(x_0)$ выполняется тождество

$$\|y_{н}(t, \varphi(x_0))\|\equiv\lambda\|x_{н}(t, x_0)\|,$$

где $\lambda=\lambda(x_0)$ — некоторое положительное, не зависящее от t число.

Нетрудно убедиться в том, что введенное отношение действительно является отношением эквивалентности. В качестве нетривиального примера эквивалентных систем рассмотрим множество систем вида

$$\dot{x}_1=x_2f(\sqrt{x^2_1+x^2_2}), \quad \dot{x}_2= -x_2f(\sqrt{x^2_1+x^2_2}),$$

где $f : \mathbf{R}_0\to\mathbf{R}_0$ есть любая взаимно однозначная на неотрицательном луче $\mathbf{R}_0$ функция. Общее решение любой такой системы имеет вид

$$x_1=\|x^0\|\sin[f(\|x^0\|)(t-t_0)], \ x_2=\|x^0\|\cos[f(\|x^0\|)(t-t_0)],$$

где t_0 и $x^0=(x_1{}^0, x_2{}^0)$ — постоянные.

Поэтому

$$\|x_{н}(t, x^0)\|^2=\|x^0\|^2\sin^2[f(\|x^0\|)t].$$

Для другой системы рассматриваемого вида, в которой роль функции f играет функция g и вектор x заменен вектором y, справедливо аналогичное соотношение

$$\|y_{н}(t, y^0)\|^2 = \|y^0\|^2 \sin^2 [g(\|y^0\|)t].$$

Полагая

$$\varphi(x^0) \overset{\Delta}{=} \frac{x^0}{\|x^0\|} g^{-1}(f(\|x^0\|)),\ \lambda \overset{\Delta}{=} \begin{cases} \dfrac{\|\varphi(x^0)\|}{\|x^0\|} & \text{при } x^0 \neq 0, \\ 1 & \text{при } x^0 = 0, \end{cases}$$

убедимся в нечетной эквивалентности рассматриваемых систем. Введение понятия нечетной эквивалентности оправдывает следующая

Теорема 1. Между 2π-периодическими решениями нечетно-эквивалентных систем, удовлетворяющих условиям А и Б из § 1, можно установить взаимно однозначное соответствие. Если дифференциальная система имеет конечное число 2π-периодических решений, то всякая нечетно-эквивалентная ей система имеет столько же 2π-периодических решений.

Δ Пусть системы (X) и (Y) нечетно-эквивалентны. Тогда $\|y_{н}(\pi, \varphi(x^0))\| \overset{x^0}{\equiv} \lambda \|x_{н}(\pi, x^0)\|$. Поэтому, ссылаясь на основную лемму из § 1, можно утверждать, что каждому 2π-периодическому решению $x(t, x^0)$ системы (X) соответствует 2π-периодическое решение $y(t, \varphi(x^0))$ системы (Y). Взаимная однозначность этого соответствия следует из взаимной однозначности отображения φ. Δ

Покажем, как в некоторых случаях фактически можно установить нечетную эквивалентность дифференциальных систем. С этой целью предположим, что функции $X(t, x)$ и $Y(t, y)$ дифференцируемы $3n$ раз. Пусть системы (X) и (Y) нечетно-эквивалентны. Тогда существует отображение $y = F(t, x)$, переводящее решение $x(t)$, $x(0) = x^0$, системы (X) в соответствующее решение $y(t)$, $y(0) = \varphi(x^0)$, системы (Y). При этом выполняется тождество $\|y_{н}(t)\| \equiv \lambda \|x_{н}(t)\|$, из которого, в чем нетрудно убедиться дифференцированием, следует ряд тождеств

$$\frac{d^k}{dt^k}[\|y(t) - y(-t)\|^2] \equiv \equiv \lambda^2 \frac{d^k}{dt^k}[\|x(t) - x(-t)\|^2],\ k = \overline{0;\ 3n}. \qquad (1)$$

Вектор-функции $x(-t)$ и $y(-t)$ удовлетворяют соответственно системам

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = -X(-t, \bar{x}) \tag{$\bar{X}$}$$

и

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = -Y(-t, \bar{y}). \tag{$\bar{Y}$}$$

Используя этот факт, производные в тождествах (1) вычислим в силу систем (X), $(\bar{X})$, (Y), $(\bar{Y})$. Тогда эти тождества примут вид

$$V^{(k)}(t, y(t), y(-t)) \overset{t}{\equiv} \lambda^2 U^{(k)}(t, x(t), x(-t)), \quad k=\overline{0;\ 3n}, \tag{2}$$

где

$$U^{(0)}(t, x, \bar{x}) \overset{\triangle}{=} \|x-\bar{x}\|^2, \quad V^{(0)}(t, y, \bar{y}) \overset{\triangle}{=} \|y-\bar{y}\|^2,$$

$$U^{(k+1)}(t, x, \bar{x}) \overset{\triangle}{=} \frac{\partial U^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial U^{(k)}}{\partial x} X(t, x) - \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \bar{x}} X(-t, \bar{x}), \tag{3}$$

$$V^{(k+1)}(t, y, \bar{y}) \overset{\triangle}{=} \frac{\partial V^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial V^{(k)}}{\partial y} Y(t, y) - \frac{\partial V^{(k)}}{\partial \bar{y}} Y(-t, \bar{y}).$$

Отображение $y=F(t, x)$ между решениями $x(t)$ и $y(t)$ попытаемся определить из соотношений (2). Основание к этому дает следующая

Теорема 2. Системы (X) и (Y), удовлетворяющие условиям А и Б из § 1, с дифференцируемыми $3n$ раз правыми частями нечетно-эквивалентны с дифференцируемой функцией $y_0=\varphi(x_0)$ тогда и только тогда, когда у недифференциальной системы

$$V^{(k)}(t, y, \bar{y}) = \lambda^2 U^{(k)}(t, x, \bar{x}), \quad k=\overline{0;\ (3n)}, \tag{4}$$

относительно неизвестных $\bar{x}$, y, $\bar{y}$ при каждом $x_0 \in D$ существует дифференцируемое по $(t, x) \in \mathbf{R} \times D$ решение

$$\bar{x}=\Phi(t, x, \lambda), \quad y=F(t, x, \lambda), \quad \bar{y}=G(t, x, \lambda), \quad \lambda=\lambda(x_0),$$

удовлетворяющее дополнительным условиям

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}X(t,x)\overset{t,\,x}{\equiv}-X(-t,\Phi),$$
$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}X(t,x)\overset{t,\,x}{\equiv}Y(t,F), \tag{5}$$
$$\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial x}X(t,x)\overset{t,\,x}{\equiv}-Y(-t,G),$$

где $\lambda=\lambda(x_0)$ есть некоторая функция со значениями в $\mathbf{R}^+$, определенная и положительная при всех $x_0\in D$ и удовлетворяющая соотношению

$$\Phi(0,x_0,\lambda(x_0))\equiv x_0,\quad x_0\in D. \tag{6}$$

Необходимость. Пусть системы (X) и (Y) нечетно-эквивалентны и $\varphi(x_0)$, $\lambda(x_0)$ — функции, существование которых устанавливается определением нечетной эквивалентности. Определим функции Φ, F, G формулами

$$\Phi(t,\hat{x})\overset{\triangle}{=}x[-t;\ 0,\ x(0;\ t,\ \hat{x})],$$
$$F(t,\hat{x})\overset{\triangle}{=}y[t;\ 0,\ \varphi(x(0;\ t,\ \hat{x}))],$$
$$G(t,\hat{x})\overset{\triangle}{=}y[-t;\ 0,\ \varphi(x(0;\ t,\ \hat{x}))],$$

где $x(t;\ \tau,\ x_0)$ и $y(t;\ \tau,\ y_0)$ означают, как обычно, решения систем (X) и (Y) соответственно. Дифференцируемость определенных таким образом функций следует из дифференцируемости функции φ, обеспечиваемой условием теоремы. Функция Φ, как нетрудно заметить, удовлетворяет условию (6) при любом λ.

Пусть $\hat{x}(t)$ — произвольное решение системы (X). Тогда из единственности решения, проходящего через точку $(0,\hat{x}(0))$, вытекает тождество $x(0;t,\hat{x}(t))\equiv\hat{x}(0)$. Поэтому функции

$$\Phi(t,\hat{x}(t))\equiv x(-t;0,\hat{x}(0)),\quad F(t,\hat{x}(t))\equiv y(t;0,\varphi(\hat{x}(0))),$$
$$G(t,\hat{x}(t))\equiv y(-t;\ 0,\ \varphi(\hat{x}(0)))$$

являются соответственно решениями систем $(\overline{X})$, (Y), $(\overline{Y})$. Отсюда, учитывая произвольность выбора решения $\hat{x}(t)$, следуют соотношения (5). Докажем, например, что функция $F(t,\hat{x})$ удовлетворяет соответствующему соотношению из (5). Действительно, так как функция $F(t, \hat{x}(t))$ — решение системы (Y), то

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, \hat{x}(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, \hat{x}(t)) X(t, \hat{x}(t)) \equiv Y(t, F).$$

Из произвольности решения $\hat{x}(t)$ следует, что его значение $x = \hat{x}(t)$ в точке t может быть выбрано произвольно, а это и доказывает выполнимость соответствующего соотношения из (5).

Теперь докажем, что функции Φ, F, G удовлетворяют соотношениям (4). Заметим, что функция F, как уже отмечалось, каждому решению $\hat{x}(t)$ системы (X) ставит в соответствие некоторое решение $\hat{y}(t) \stackrel{\Delta}{=} F(t, \hat{x}(t))$ системы (Y). Так как $\hat{y}(0) = y(0; 0, \varphi(\hat{x}(0))) = \varphi(\hat{x}(0))$, то по условию теоремы обязано выполняться тождество $\|\hat{y}_{\text{н}}(t)\| \equiv \lambda \|\hat{x}_{\text{н}}(t)\|$, из которого в силу произвольности выбора решения $\hat{x}(t)$ и следуют тождества (4).

Достаточность. Пусть Φ, F, G, λ — функции, существующие и удовлетворяющие по условию теоремы соотношениям (4), (5), (6), а $x(t)$ — некоторое решение системы (X). Определим новые функции

$$\bar{x}(t) \stackrel{\Delta}{=} \Phi(t, x(t), \lambda(x(0))),$$
$$y(t) \stackrel{\Delta}{=} F(t, x(t), \lambda(x(0))),$$
$$\bar{y}(t) \stackrel{\Delta}{=} G(t, x(t), \lambda(x(0))).$$

Функция $\bar{x}(t)$, как следует из первого тождества в соотношениях (5), является решением системы $(\bar{X})$. Функция $x(-t)$ также является решением системы $(\bar{X})$, причем согласно соотношению (6)

$$\bar{x}(0) = \Phi(0, x(0), \lambda(x(0))) = x(0).$$

Поэтому в силу единственности решения задачи Коши для системы $(\bar{X})$ обязаны выполняться тождества

$$x(-t) \equiv \bar{x}(t) \stackrel{\Delta}{=} \Phi(t, x(t), \lambda(x(0))). \qquad (7)$$

По условию функции Φ, F, G обязаны удовлетворять соотношениям (4) и, в частности, соотношению $V^{(0)}(t, F, G) \equiv \lambda^2 U^{(0)}(t, x, \Phi)$, т. е. обязано выполняться тождество

$$\|F-G\|^2 \equiv \lambda^2 \|x-\Phi\|^2,$$

откуда, учитывая тождество (7) и определения функций $y(t)$ и $\bar{y}(t)$, получим тождество

$$\|y(t)-\bar{y}(t)\|^2 \equiv \lambda^2 \|x(t)-x(-t)\|^2. \tag{8}$$

Из этого тождества при $t=0$ следует равенство $y(0)=\bar{y}(0)$. Из определения функций $y(t)$ и $\bar{y}(t)$ и соотношений (5) следует, что $y(t)$ — решение системы (Y), а $\bar{y}(t)$ — системы $(\bar{Y})$. Функция $y(-t)$ также решение системы $(\bar{Y})$, причем $y(-0)=\bar{y}(0)$. Поэтому в силу единственности решения задачи Коши для системы $(\bar{Y})$ обязано выполняться тождество $y(-t) \equiv \bar{y}(t)$. Таким образом, тождество (8) можно записать в виде

$$\|y(t)-y(-t)\|^2 \equiv \lambda^2 \|x(t)-x(-t)\|^2,$$

что доказывает нечетную эквивалентность систем (X) и (Y). $\triangle$

Примечание. Следует отметить, что теорема 2 будет справедлива и тогда, когда в тождествах (4) индекс k принимает только одно значение $k=0$. Удобнее, однако, выписать все равенства (4), соответствующие значениям $k=\overline{0;\, 3n}$, так как они дают возможность определить функции Φ, F, G, не решая дифференциальных уравнений. Знание функции F дает возможность определить отображение $\varphi(x_0) \equiv F(0, x_0)$.

Следствие. Пусть у системы

$$V^{(k)}(t, y, \bar{y}) = \lambda^2 U^{(k)}(t, x, \bar{x}),\ k=\overline{0;\, 2n-1}, \tag{4a}$$

рассматриваемой относительно неизвестных $\bar{x}$, $\bar{y}$, существует дифференцируемое по $(t, x, y) \in \mathbf{R} \times D \times \Delta$ решение

$$\bar{x} = \Phi(t, x, y, \lambda),\ \bar{y} = G(t, x, y, \lambda),$$

удовлетворяющее дополнительным условиям

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} X(t, x) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} Y(t, y) \equiv -X(-t, \Phi),$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial x}X(t,x)+\frac{\partial G}{\partial y}Y(t,y)\equiv -Y(-t,G),$$

где $\lambda=\lambda(x_0)$ — некоторая функция со значениями в $\mathbf{R}$, определенная и положительная при всех $x_0\in D$ и удовлетворяющая там вместе с некоторой взаимно однозначной функцией $\varphi:D\to\Delta$ соотношению

$$\Phi(0,x_0,\varphi(x_0),\lambda(x_0))\equiv x_0.$$

Тогда системы (X) и (Y), удовлетворяющие условиям А и Б, нечетно-эквивалентны.

Δ Через $F(t,x)$ обозначим решение системы

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}X(t,x)=Y(t,F)$$

с начальным условием $F(0,x_0)=\varphi(x_0)$, $\forall x_0\in D$.

Тогда функции

$$F(t,x),\ \Phi(t,x,F(t,x),\lambda),\ G(t,x,F(t,x),\lambda)$$

будут выполнять роль функций F,Φ,G из теоремы 2. Δ

Пример. Пользуясь следствием, докажем, что уравнение

$$\dot{x}=\frac{x\cos t}{\alpha+\sin t},\quad |\alpha|>1,\ t\in\mathbf{R},\ x>0,$$

нечетно-эквивалентно уравнению $\dot{y}=\cos t$. С этой целью составим для этих уравнений систему типа (4а)

$$(y-\bar{y})^2=\lambda^2(x-\bar{x})^2,$$

$$2(y-\bar{y})2\cos t=2\lambda^2\left[\frac{x\cos t}{\alpha+\sin t}+\frac{\bar{x}\cos t}{\alpha-\sin t}\right](x-\bar{x}).$$

Найдем отсюда

$$\bar{x}=\frac{2}{\lambda}(\alpha-\sin t)-\frac{\alpha-\sin t}{\alpha+\sin t}x\triangleq\Phi(t,x,y,\lambda),$$

$$\bar{y}=y-2(\alpha-\sin t)+\frac{2\alpha x}{\alpha+\sin t}\triangleq G(t,x,y,\lambda).$$

Найденные функции Φ и G удовлетворяют всем условиям следствия, если $\lambda(x_0)=\alpha/x_0$ определить из соотношения

$$x_0=\frac{2}{\lambda}(\alpha-\sin 0)-\frac{\alpha-\sin 0}{\alpha+\sin 0}x_0,$$

а в качестве φ выбрать любую функцию, взаимно однозначно отображающую полуось $x>0$ в прямую.

С помощью понятия нечетной эквивалентности множество дифференциальных систем вида (X) разбивается на классы эквивалентности. Теорема 2 позволяет установить, принадлежат ли две наперед заданные системы одному классу или разным классам эквивалентности. Если две системы принадлежат одному классу эквивалентности, то согласно теореме 1 они обязаны иметь одинаковое число периодических решений. Это обстоятельство позволило бы строить эффективные признаки наличия или отсутствия периодических решений, если бы мы научились для всякой данной системы строить нечетно-эквивалентные ей системы. Оказывается, можно предложить некоторые методы построения таких систем. Опишем здесь один из них.

Пусть для системы (X) известна функция $\Phi(t, x)$, обладающая свойством $x(-t) \equiv \Phi(t, x(t))$ для любого решения $x(t)$ системы (X). Возьмем любую функцию $F(t, x, \bar{x})$ со свойством

$$F(t, x, \bar{x}) - F(-t, \bar{x}, x) \equiv x - \bar{x}$$

(примером такого рода функций являются функции вида $F = x + s(t)(x + \bar{x}) + R(t)(x - \bar{x})$, где $s(t)$ — четная, а $R(t)$ — нечетная матрицы). Легко убедиться в том, что система (Y), полученная из системы (X) преобразованием $y = F(t, x, \Phi(t, x))$, будет нечетно-эквивалентна системе (X).

Говоря об обобщениях понятия нечетной эквивалентности, следует отметить, что в качестве λ можно взять любую функцию $\lambda(t, x, \bar{x}, y, \bar{y})$ с положительными значениями. При этом легко доказать аналог теоремы 1, но трудно найти соответствующий аналог для теоремы 2, избавляющий от решения дифференциальных уравнений.

Выгоднее считать, как и прежде, λ постоянным вдоль соответствующих решений, размерности систем (X) и (Y) не совпадающими, а отображение $\varphi : D \to \mathbf{R}$ неоднозначным. Тогда из тождества $\|y_{\text{н}}(t, \varphi(x_0))\| = \lambda \|x_{\text{н}}(t, x_0)\|$ будет следовать, что каждому 2π-периодическому решению $x(t, x_0)$ системы (X) соответствуют тоже 2π-периодические решения $y(t, \varphi(x_0))$ системы (Y), и наоборот: 2π-периодическому решению $y(t, y_0)$ системы (Y) соответствуют периодические решения $x(t, \varphi^{-1}(x_0))$ системы (X). Соответствующий аналог для теоремы 2 также имеет место, хотя его формулировку, возможно, и нельзя дать в достаточно простой форме.

При изучении периодических дифференциальных систем иногда полезно использовать следующие теоремы.

Теорема 3. Пусть непрерывно дифференцируемая функция $X(t, x)$ — 2π-периодична по t, а каждое решение $z(t; -\pi, z_0)$ системы

$$\dot{z}=\frac{1}{2}[X(t, z)-X(-t, z)] \tag{9}$$

определено при всех $t \in \mathbf{R}$. Тогда существует система

$$\dot{y}=\left[\frac{\partial z}{\partial y}(t; -\pi, y)\right]^{-1} \frac{X(t, z(t; -\pi, y))+X(-t, z(t; -\pi, y))}{2} \tag{10}$$

с четной по t и 2π-периодической по t правой частью, для которой $y(\pi; -\pi, x_0) \equiv x(\pi; -\pi, x_0)$. Поэтому решение $x(t; -\pi, x_0)$ системы (X) будет 2π-периодическим тогда и только тогда, когда будет 2π-периодическим решение $y(t; -\pi, x_0)$ системы (10).

Доказательство вытекает из следующих легко проверяемых утверждений: 1) решение $z(t; -\pi, z_0)$ системы (9) при любом z_0 является 2π-периодической и четной по t вектор-функцией (см. следствие 1 на стр. 86); 2) взаимно однозначное преобразование $x=z(t; -\pi, y)$ преобразует систему (10) в систему (X). $\triangle$

Теорема 4. Пусть системы (X) и (Y) удовлетворяют условиям А и Б (см. стр. 70), а система уравнений

$$\left.\begin{aligned} &F'_t+F'_x X(t, x)+X(-t, F)=0, \\ &F'_t+F'_x Y(t, x)+Y(-t, F)=0, \\ &F(0, x)=x \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

совместна. Тогда решение $x(t; -\pi, x_0)$ системы (X) будет 2π-периодическим тогда и только тогда, когда будет 2π-периодическим решение $y(t; -\pi, x_0)$ системы (Y).

$\triangle$ Пусть $F(t, x)$ — решение системы (11). Тогда из леммы 2 на стр. 74 вытекает, что $x(\pi; -\pi, x_0)=$ $=y(\pi; -\pi, x_0)$, откуда следует утверждение теоремы. $\triangle$

Замечание. Условия совместности системы (11) легко получить, применяя теорему Фробениуса [40, с. 81].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск, 1979.
2. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М., 1958.
3. *Bellman Richard.* On non-linear basis for nonlinear differential equations. — Nonlinear Analysis, Theory, Methods Applications, 1979, Vol. 3, p. 517.
4. *Spijker M. N.* Superposition in linear and nonlinear ordinary differential equations. — J. Math. Anal. and Appl., 1970, 30, N 1, p. 206—222.
5. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М., 1979.
6. *Старжинский В. М.* Прикладные методы нелинейных колебаний. М., 1977.
7. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л., 1947.
8. *Dessau Harold R.* Dynamic linearization and Ω-observability of nonlinear systems. — J. Math. Anal. and Appl., 1972, 40, N 2, p. 409—417.
9. *Плисс В. А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М.—Л., 1964.
10. *Laloux B.* Multiplicity and bifurkation of periodic solutions in ordinary differential equations. — Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1979, A82, N 3-4, p. 225—232.
11. *Leach D. E.* On Poincaré's perturbation theorem and a theorem of W. S. Loud. — J. Differential Equations, 7 (1970), p. 34—53.
12. *Loud W. S.* Periodic solutions of second order differential equations of Duffing type. Proceedings U. S. — Japan Seminar on Differential and Functional Equations, W. A. Benjamin, Inc., 1967, p. 199—224.
13. *Loud W. S.* Nonsymmetric periodic solutions of certain second order nonlinear differential equations. — J. Different. Equat., 1969, 5, N 2, p. 352—368.
14. *Ляпунов А. М.* Собр. соч. М.—Л., 1956, т. 2.
15. *Horn R. A.* — Amer. Math. Mon., 1970, 77, N 1, p. 65—66.
16. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1970.
17. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М., 1969.
18. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, 1974.

19. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1971.
20. *Богданов Ю. С.* Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, 1977.
21. *Богданов Ю. С.* Лекции по математическому анализу. Минск, 1978, ч. 2.
22. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х.* Математический анализ. М., 1979.
23. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1966.
24. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую. — ПММ, 1952, № 16, вып. 6, с. 659—670.
25. *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939.
26. *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М., 1961.
27. *Ганнинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных переменных. М., 1969.
28. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.
29. *Уокер Р.* Алгебраические кривые. М., 1952.
30. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М., 1976.
31. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
32. *Мироненко В. И.* Об одном классе дифференциальных систем с элементарными решениями. — Диф. уравнения, 1968, т. 4, № 6, с. 1154—1156.
33. *Eggan L. C., Insel A. J.* A Wronskian condition related to ordinary differential equations. — Amer. Math. Mon., 1973, 80, N 3, p. 300—302.
34. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., 1967.
35. *Мироненко В. И.* Линейная зависимость функций вдоль решений систем дифференциальных уравнений и системы с алгебраическими траекториями. — Диф. уравнения, 1972, т. 8, № 12, с. 2197—2204.
36. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М., 1970.
37. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
38. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М., 1975.
39. *Мироненко В. И.* Об одном способе построения функций Ляпунова и диссипативности многомерных систем. — Диф. уравнения, 1969, т. 5, № 7, с. 1326—1329.
40. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1978.
41. *Лебедева В. М.* О числе периодических решений уравнения первого порядка с рациональной правой частью. — Диф. уравнения, 1969, т. 5, № 3, с. 560—562.
42. *Лебедева В. М.* О числе периодических решений дифференциального уравнения первого порядка с правой частью в виде неполного многочлена. — Диф. уравнения, 1969, т. 5, № 6, с. 1029—1036.

43. *Lloyd N. G.* The number of periodic solutions of the equations $\dot{z}=z^n+p_1(t)z^{n-1}+\ldots+p_n(t)$. — Proc. London Math. Soc., 1973, 27, N 4, p. 667—700.

44. *Lloyd N. G.* On class of differential equations of Riccati type. — J. London Math. Soc., 1975, 10, N 1, p. 1—10.

45. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. Киев, 1976.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Владимир Иванович Мироненко

ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИЙ ВДОЛЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Редактор *Н. Н. Курчатова*

Младший редактор *Л. Ф. Степанова*

Обложка и художественное редактирование *Л. Г. Медведевой*

Технический редактор *В. П. Безбородова*

Корректоры *З. М. Машкевич, Л. В. Лебедева*

ИБ № 577

Сдано в набор 11.06.80. Подписано в печать 06.02.81. АТ 05029. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага газетная. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 5,46. Усл. кр.-отт. 5,56. Уч.-изд. л. 5,16. Доп. тираж 500 экз. Зак. 2348. Цена 75 к.

Издательство БГУ им. В. И. Ленина Минвуза БССР и Госкомиздата БССР. Минск, проспект Машерова, 11.
Типография «Победа» Госкомиздата БССР. Молодечно, ул. Тавлая, 11.